





CALCOLO INTEGRALE.



Tipografia A. Trani Conte di Mola 13.



TRATTATO

SUL

CALCOLO INTEGRALE

E LE SUE APPLICAZIONI

CON MOLTI ESEMPII.

PER

I. TODHUNTER, M. A.

SOCIO E PRINCIPALE LETTORE DI MATEMATICA NEL COLLEGIO
DI S. GIOVANNI A CAMBRIDGE.

Versione dall' inglese con aggiunte

PER

G. BATTAGLINI

Prof. di Geometria superiore nell' Università di Napoli.





NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI B. PELLERANO
Str. di Chiaia 60.
1870.

PREFAZIONE.

Nello scrivere il presente trattato sul *Calcolo Integrale*, si è avuto in mira di comporre un'opera ad un tempo elementare e completa — adatta per l'uso dei principianti, e sufficiente ai bisogni degli studenti provetti. Nella scelta delle proposizioni e nel modo di stabilirle, ho cercato di esibire interamente e con chiarezza i principii del soggetto, e di illustrare tutti i loro più importanti risultati. Il procedimento di *sommazione* è stato ripetutamente messo in vista, nello scopo di fissar l'attenzione dello studente sulle nozioni che formano il vero fondamento del Calcolo Integrale stesso, come anche delle sue più importanti applicazioni. Una considerabile parte dell'opera è stata dedicata alle ricerche delle lunghezze e delle aree delle curve e dei volumi dei solidi, e si è tentato di spiegare quelle difficoltà che ordinariamente rendono perplessi i principianti — specialmente rispetto ai *limiti* delle integrazioni.

La trasformazione degl'integrali è una delle parti più interessanti del Calcolo Integrale, e l'esperienza degl'insegnanti mostra che i modi soliti di trattarla non sono esenti da oscurità. Ho adottato perciò un metodo diverso da quelli dei precedenti scrittori elementari, ed ho cercato di renderlo facil-

mente intelligibile con minuta esposizione, e con la soluzione di diversi problemi.

Il *Calcolo delle Variazioni* sembra esigere un posto nel presente trattato così convenientemente come l'ordinaria teoria dei valori massimi e minimi è inclusa nel Calcolo Differenziale. L'ultimo capitolo del trattato è perciò dedicato a questo argomento; e si ha speranza che la teoria e le illustrazioni ivi esposte si troveranno, per rispetto alla semplicità e chiarezza, adattate ai bisogni degli studenti.

Affinchè lo studente possa trovare nel volume tutto ciò che egli richiede, si è aggiunta ai diversi capitoli un'ampia collezione di esempii per esercizio. Questi esempii sono stati scelti dalle Memorie degli Esami del Collegio e della Università, e sono stati accuratamente verificati, sicchè si crede che ben pochi errori si troveranno tra essi.

I. TODHUNTER.

Collegio di S. Giovanni
Gennaio 1862.

N. B. Le aggiunte al Calcolo Integrale, contenute in questo volume, sono state tratte dal *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions* del COURNOT.

IL TRADUTTORE.

INDICE.

AGGIUNTE.

Pagina.	Linea.	ERRORI.	CORREZIONI. Si legga.
20	14	$\int e^{-x} \cos x dx$	$\int e^{-x} \cos^3 x dx$
22	16	$a + b^n$	$a + bx^n$
28	20	e P	e P'
40	16	$\int \frac{x^m X^p}{m + np}$	$\frac{x^m X^p}{m + np}$
48	11	$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}$	$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}$
95	9	$\sqrt{(a^2 - x^3)}$	$\sqrt{(a^2 - x^2)}$
»	21	dal	del
127	18	e	è
160	16	elementi	gli elementi
248	1	e^{bx}	e^{-bx}
250	7	227	277
279	3	$\frac{(2n-1)\pi x}{2}$	$\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$
284	10	$n = 1$	$n - 1$
296	9	∂p_1	∂q_1
305	21	$\partial p_0 Q$	$\partial p_0 Q_0$

CALCOLO INTEGRALE.

CAPITOLO I.

SIGNIFICATO DELL'INTEGRAZIONE. ESEMPII.

1. Nel Calcolo Differenziale abbiamo un sistema di regole per mezzo delle quali deduciamo da una data funzione una seconda funzione chiamata il coefficiente differenziale della prima; nel Calcolo Integrale dobbiamo ritornare dal coefficiente differenziale alla funzione dalla quale fu dedotto. Non diciamo che questo sia l'*oggetto* del Calcolo Integrale, poichè il problema fondamentale del soggetto si è di effettuare la somma di una certa serie infinita di termini infinitamente piccoli; ma per la soluzione di questo problema dobbiamo conoscere generalmente la funzione di cui una data funzione è il coefficiente differenziale. Questo procediamo ora a mostrare.

2. Dinoti $\varphi(x)$ una funzione di x che rimane finita e continua per tutt'i valori di x compresi tra due valori fissi a e b. Sia $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ una serie di valori compresi tra a e b, sicchè $a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b$ siano in ordine di grandezza ascendente o discendente. Ci proponiamo allora di trovare il limite della serie

$$(x_1 - a)\varphi(a) + (x_2 - x_1)\varphi(x_1) + (x_3 - x_2)\varphi(x_2) + \ldots\ldots + (b - x_{n-1})\varphi(x_{n-1}),$$

quando $x_1 - a,\ x_2 - x_1, \ldots b - x_{n-1}$ diminuiscono tutte senza limite, e per conseguenza n cresce senza limite.

Si ponga $x_1 - a = h_1,\ x_2 - x_1 = h_2, \ldots b - x_{n-1} = h_n$; così la serie può essere scritta

$$h_1\varphi(a) + h_2\varphi(x_1) \ldots + h_{n-1}\varphi(x_{n-2}) + h_n\varphi(x_{n-1}),$$

e può essere dinotata con $\Sigma h\varphi(x)$, poichè essa è la somma di un numero di termini di cui $h\varphi(x)$ può essere preso come il tipo. Siccome ciascuno dei termini di cui h è il tipo può essere considerato come la differenza tra due valori assegnati successivamente alla variabile x, possiamo usare anche il simbolo $\varphi(x)\Delta x$ come il tipo dei termini da sommarsi, e $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ per la somma.

Possiamo mostrare immediatamente che $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ non può mai eccedere una certa quantità finita. Infatti dinoti A il massimo valore numerico che $\varphi(x)$ può avere quando x è compreso tra a e b; allora $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ è numericamente minore di $(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)A$, vale a dire minore di $(b-a)A$.

Procediamo ora a determinare il limite di $\Sigma\varphi(x)\Delta x$. Sia $\psi(x)$ una funzione di x tale che $\varphi(x)$ sia il suo coefficiente differenziale rispetto ad x. Allora conosciamo che il limite di $\dfrac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}$ quando h diminuisce indefinitamente è $\varphi(x)$. Quindi possiamo porre

$$\psi(x_1) - \psi(a) = h_1\{\varphi(a) + \rho_1\},$$
$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = h_2\{\varphi(x_1) + \rho_2\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(x_{n-1}) - \psi(x_{n-2}) = h_{n-1}\{\varphi(x_{n-2}) + \rho_{n-1}\},$$
$$\psi(b) - \psi(x_{n-1}) = h_n\{\varphi(x_{n-1}) + \rho_n\},$$

in cui $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ in ultimo svaniscono. Da queste equazioni abbiamo con l'addizione

$$\psi(b) - \psi(a) = \Sigma\varphi(x)\Delta x + \Sigma h\rho.$$

Ora $\Sigma h\rho$ è minore di $(b-a)\rho'$ in cui ρ' dinota la più grande delle quantità $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$; quindi $\Sigma h\rho$ in ultimo svanisce, ed otteniamo questo risultato, *il limite di $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ quando ciascuna delle quantità di cui Δx è il tipo diminuisce indefinitamente è $\psi(b) - \psi(a)$.*

3. La notazione in uso per esprimere il risultato precedente è

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a);$$

il simbolo $\int$ è un'abbreviazione della parola « somma, » e dx rappresenta il Δx di $\Sigma\varphi(x)\Delta x$.

4. Supponiamo che $h_1, h_2, \ldots h_n$ siano tutti eguali; allora ciascuno di essi è eguale a $\frac{b-a}{n}$, ed x_r è eguale ad $a + \frac{r}{n}(b-a)$. Quindi $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ è equivalente alla seguente direzione, « si divida $b-a$ in n parti eguali, ciascuna parte essendo h; in $\varphi(x)$ si sostituiscano per x successivamente $a, a+h, a+2h, \ldots a+(n-1)h$; si aggiungano questi valori insieme, si moltiplichi la somma per h e poi si diminuisca h senza limite ». Se queste operazioni sono effettuate avremo per risultato $\psi(b) - \psi(a)$, in cui $\psi(x)$ è la funzione di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale rispetto ad x.

Lo studente adunque deve osservare accuratamente che per fondamento del Calcolo Integrale abbiamo un certo *teorema* ed una corrispondente *notazione*. Il *teorema* è il seguente: sia $\psi(x)$ una funzione di x, e $\varphi(x)$ il suo coefficiente differenziale rispetto ad x; sia n un intero positivo ed $nh=b-a$; allora il limite quando n cresce indefinitamente di

$$h\left\{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \varphi(b-h)\right\}$$

è $\psi(b) - \psi(a)$.

La *notazione* si è che questo limite è dinotato da $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, sicchè

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a).$$

Come un caso particolare possiamo supporre che a sia zero; allora $nh=b$, ed il limite quando n cresce indefinitamente di

$$h\left\{\varphi(0) + \varphi(h) + \varphi(2h) + \ldots + \varphi(b-h)\right\}$$

è dinotato da $\int_0^b \varphi(x)\,dx$, ed è eguale a $\psi(b) - \psi(0)$.

5. Un singolo termine come $\varphi(x)\,\Delta x$ si chiama frequentemente un *elemento*. Si può osservare che il *limite* di $\Sigma\varphi(x)\,\Delta x$ non sarà alterato in valore se omettiamo un numero *finito* dei suoi elementi, o aggiungiamo un numero

finito di simili elementi; poichè nel limite ciascun elemento è indefinitamente piccolo, ed un numero *finito* di quantità indefinitamente piccole in ultimo svanisce.

6. Il procedimento precedente si chiama *Integrazione;* la quantità $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ si dice un *integrale definito*, ed a e b sono chiamati i *limiti dell' integrale.* Poichè il valore di questo integrale definito è $\psi(b) - \psi(a)$ dobbiamo, quando una funzione $\varphi(x)$ deve essere integrata tra limiti assegnati, prima trovare la funzione $\psi(x)$ di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale. Per esprimere il legame tra $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ abbiamo

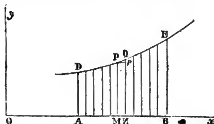
$$\varphi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx},$$

e questo è anche dinotato dall' equazione

$$\int \varphi(x)\, dx = \psi(x).$$

In una equazione come l' ultima, in cui non abbiamo limiti assegnati, asseriamo semplicemente che $\psi(x)$ è la funzione da cui si può ottenere $\varphi(x)$ per mezzo della differenziazione; $\psi(x)$ è quì chiamata l' integrale *indefinito* di $\varphi(x)$.

7. Il problema di trovare le aree delle curve fu uno di quelli che diedero origine al Calcolo Integrale, e fornisce un' illustrazione degli articoli precedenti.



Sia DPE una curva di cui l' equazione è $y = \varphi(x)$, e supponiamo si voglia trovare l' area racchiusa tra questa curva, l' asse delle x, e le ordinate corrispondenti alle ascisse a e b. Sia $OA = a$, $OB = b$; si divida la distanza AB in n

intervalli eguali e si tirino le ordinate nei punti di divisione. Si supponga $OM = a + (r-1)h$, allora l'area del parallelogrammo $PMNp$ è

$$h\varphi\{a + (r-1)h\}.$$

La somma ottenuta assegnando ad r in questa espressione tutt'i valori da 1 ad n differisce dall'area richiesta della curva per la somma di tutte le porzioni analoghe al triangolo PQp, e come quest'ultima somma evidentemente è minore della più grande delle figure di cui $PMNQ$ ne è una, possiamo, diminuendo sufficientemente h, ottenere un risultato che differisce tanto poco quanto ci piace dall'area richiesta. Quindi l'area della curva è il limite della serie

$$h\left\{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots\ldots + \varphi(b-h)\right\},$$

ed è eguale a $\psi(b) - \psi(a)$.

8. Se $\psi(x)$ è la funzione da cui risulta $\varphi(x)$ con la differenziazione, noi dinotiamo ciò con l'equazione

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi(x),$$

e procediamo ora ai metodi per trovare $\psi(x)$ quando è data $\varphi(x)$. Abbiamo mostrato, *Cal. Dif.* Art. 102, che se due funzioni hanno lo stesso coefficiente differenziale rispetto ad una variabile esse possono differire solamente per una quantità costante; quindi se $\psi(x)$ è una funzione che ha $\varphi(x)$ per suo coefficiente differenziale rispetto ad x, allora $\psi(x) + C$, in cui C è una quantità indipendente da x, è la sola forma che può avere il medesimo coefficiente differenziale. Quindi, in prosieguo, quando asseriamo che una funzione è l'integrale di una proposta funzione, possiamo se ci piace aggiungere a questo integrale una quantità costante.

L'integrazione adunque apparirà per qualche tempo essere semplicemente l'*inversa* della differenziazione, ed avremmo potuto definirla in tal modo; abbiamo però preferito d'introdurre dal principio la nozione di *sommazione* poichè essa s'incontra in molte delle più importanti applicazioni del soggetto.

Possiamo osservare che se $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ sono funzioni di x,

$$\int \{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\}\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx;$$

o al più le due espressioni che asseriamo essere eguali possono differire solamente per una costante, infatti se le differenziamo entrambe arriviamo allo stesso risultato, cioè, $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$.

Inoltre, se c è una quantità costante

$$\int c\varphi(x)\,dx = c\int \varphi(x)\,dx;$$

o al più le due espressioni possono differire solamente per una costante.

9. *Integrazione immediata.*

Quando una funzione si riconosce essere il coefficiente differenziale di un'altra funzione conosciamo allora l'integrale della prima. La seguente lista dà gl'integrali delle differenti funzioni semplici;

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \qquad \int \frac{dx}{x} = \log x,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a}, \qquad \int e^x\,dx = e^x,$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o} \quad = -\cos^{-1}\frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o} \quad = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}.$$

10. *Integrazione per sostituzione.*

Il procedimento dell'integrazione è alle volte facilitato sostituendo per la variabile una funzione di una nuova variabile. Supponiamo $\varphi(x)$ la funzione da integrarsi, ed a e b i limiti dell'integrale. È evidente che possiamo supporre x essere una funzione di una nuova variabile z, purchè la funzione scelta sia capace di prendere tutt'i valori di x richiesti nella integrazione. Si ponga adunque $x = f(z)$, e siano a' e b' i valori di z, che rendono $f(z)$ o x eguale ad a e b rispettivamente; così $a = f(a')$ e $b = f(b')$. Si supponga

ora che $\psi(x)$ sia la funzione di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale, cioè si supponga $\varphi(x)=\frac{d\psi(x)}{dx}$; allora

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a)$$
$$= \psi\{f(b')\} - \psi\{f(a')\}.$$

Ma per i principii del Calcolo Differenziale,

$$\frac{d\psi\{f(z)\}}{dz} = \varphi\{f(z)\}f'(z);$$

quindi $\psi\{f(b')\} - \psi\{f(a')\} = \int_{a'}^{b'} \varphi\{f(z)\}f'(z)\,dz$

$$= \int_{a'}^{b'} \varphi(x)\frac{dx}{dz}\,dz;$$

così $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{a'}^{b'} \varphi(x)\frac{dx}{dz}\,dz.$

Questo risultato possiamo scriverlo semplicemente così

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)\frac{dx}{dz}\,dz,$$

purchè ci rammentiamo che quando il primo integrale è preso tra certi limiti a e b, l'ultimo deve essere preso tra i limiti corrispondenti a' e b'.

11. Come un esempio dell'articolo precedente si cerchi $\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Si ponga $x=a-z$, allora $\frac{dx}{dz}=-1$, e $2ax-x^2=a^2-z^2$. Così

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = \int \frac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)}}\frac{dx}{dz}\,dz = -\int \frac{dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}}$$
$$= \cos^{-1}\frac{z}{a} = \cos^{-1}\frac{a-x}{a} - \text{vers}^{-1}\frac{x}{a}.$$

Inoltre, si cerchi $\int \frac{dx}{x\sqrt{(2ax-a^2)}}$. Si ponga $x=\frac{a}{1-z}$, così $\frac{dx}{dz}=\frac{a}{(1-z)^2}$, ed $\int \frac{dx}{x\sqrt{(2ax-a^2)}} = \int \frac{1}{x\sqrt{(2ax-a^2)}}\frac{dx}{dz}\,dz$

$$=\int \frac{dz}{a\sqrt{\{2(1-z)-(1-z)^2\}}}=\frac{1}{a}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{sen}^{-1} z=\frac{1}{a}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x-a}{x}.$$

Quì abbiamo trovato gl' integrali proposti sostituendo per x nel modo indicato nell' articolo precedente. Questo procedimento spesso semplificherà un integrale proposto, ma nessuna regola può darsi per guidare lo studente circa la migliore supposizione da fare; questo punto deve essere lasciato all' osservazione ed alla pratica.

12. *Integrazione per parti.*

Dall' equazione $\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

deduciamo integrando i due membri,

$$uv=\int u\frac{dv}{dx}dx+\int v\frac{du}{dx}dx.$$

onde
$$\int u\frac{dv}{dx}dx=uv-\int v\frac{du}{dx}dx.$$

L'uso di questa formola si dice « integrazione per parti ».

Per un caso particolare si supponga $v=x$; allora otteniamo

$$\int u dx=ux-\int x\frac{du}{dx}dx.$$

Per esempio, si consideri $\int x\cos ax\, dx$. Poichè

$$\cos ax=\frac{1}{a}\frac{d\operatorname{sen} ax}{dx},$$

possiamo scrivere l' espressione proposta nella forma

$$\int \frac{x}{a}\frac{d\operatorname{sen} ax}{dx}dx,$$

e questa, per la formola, supponendo $u=\frac{x}{a}$ e $v=\operatorname{sen} ax$,

$$=\frac{x\operatorname{sen} ax}{a}-\int \frac{\operatorname{sen} ax}{a}dx$$

$$= \frac{x \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2}.$$

Inoltre, $$\int x^2 \cos ax\, dx = \int \frac{x^2}{a} \frac{d \operatorname{sen} ax}{dx} dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{a} - \int \frac{2x}{a} \operatorname{sen} ax\, dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{a} + \int \frac{2x}{a^2} \frac{d \cos ax}{dx} dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{2x \cos ax}{a^2} - \int \frac{2 \cos ax}{a^2} dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{2x \cos ax}{a^2} - \frac{2 \operatorname{sen} ax}{a^3}.$$

Ancora, $$\int e^{cx} \operatorname{sen} ax\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} ax}{c} \frac{de^{cx}}{dx} dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} ax}{c} e^{cx} - \int \frac{ae^{cx} \cos ax}{c} dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} ax}{c} e^{cx} - \int \frac{a \cos ax}{c^2} \frac{d e^{cx}}{dx} dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} ax}{c} e^{cx} - \frac{a \cos ax}{c^2} e^{cx} - \int \frac{a^2 \operatorname{sen} ax}{c^2} e^{cx}\, dx.$$

Trasponendo,

$$\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \int e^{cx} \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{e^{cx}}{c} \left(\operatorname{sen} ax - \frac{a}{c} \cos ax \right),$$

quindi $$\int e^{cx} \operatorname{sen} ax dx = \frac{e^{cx} (c \operatorname{sen} ax - a \cos ax)}{a^2 + c^2}.$$

Similmente possiamo mostrare che

$$\int e^{cx} \cos ax dx = \frac{e^{cx} (c \cos ax + a \operatorname{sen} ax)}{a^2 + c^2}.$$

13. Il coefficiente differenziale di una funzione si può sempre trovare con l'uso delle regole date nel Calcolo Differenziale, ma non è così per l'integrale di una funzione assegnata. Conosciamo, per esempio, che se m è un numero, positivo o negativo, eccetto -1, allora $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, ma quando $m = -1$ ciò non è vero; in questo caso abbiamo $\int \frac{dx}{x} = \log x$. Se però non avessimo previamente definito il termine *logaritmo*, ed investigate le proprietà dei *logaritmi*, saremmo stati inabilitati a stabilire quale funzione abbia $\frac{1}{x}$ per suo coefficiente differenziale. Così possiamo trovarci limitati nel nostro potere di integrazione dal non aver dato un nome ad ogni funzione particolare ed investigate le sue proprietà.

Per effettuare una proposta integrazione, sarà spesso necessario di adoperare artifizii che possono essere suggeriti solamente dalla pratica.

14. Aggiungiamo pochi esempi diversi.

Es. (1). $\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx.$

$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx = x\sqrt{(a^2 - x^2)} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, per l'Art. 12,

supponendo $u = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ e $v = x$.

Ed $\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}\,dx = \int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$;

quindi, per addizione,

$$2\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx = x\sqrt{(a^2 - x^2)} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

onde $\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + \frac{a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}$. Art. 9.

Es. (2). $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$.

Si ponga $\sqrt{(x^2+a^2)} = z - x$, onde $a^2 = z^2 - 2zx$,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{z-x}{z}.$$

Quindi $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}} \frac{dx}{dz} dz = \int \frac{dz}{z} = \log z$

$$= \log \{ x + \sqrt{(x^2+a^2)} \}.$$

Es. (3). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

Come nell'Es. (2), possiamo mostrare che il risultato è

$$\log \{ x + \sqrt{(x^2-a^2)} \}.$$

Es. (4). $\displaystyle\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx$.

$$\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx = x\sqrt{(x^2+a^2)} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} \text{ per l'Art. 12.}$$

Inoltre

$$\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx = \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)}} dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}};$$

quindi, per addizione,

$$2\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx = x\sqrt{(x^2+a^2)} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}};$$

onde $\displaystyle\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(x^2+a^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \log \{ x + \sqrt{(x^2+a^2)} \}$.

Similmente

$$\int \sqrt{(x^2-a^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2} \log \{ x + \sqrt{(x^2-a^2)} \}.$$

Es. (5). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} + x^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left\{\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4c^2}\right\}}}.$$

Ponendo $x+\frac{b}{2c}=z$, il nostro integrale diviene, per (2) e (3),

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\log\{2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{(a+bx+cx^2)}\},$$

in cui omettiamo la quantità costante $\frac{1}{\sqrt{c}}\log 2c$.

In modo simile, ponendo $z=x+\frac{b}{2c}$ possiamo far dipendere $\int\sqrt{(a+bx+cx^2)}\,dx$ dall' Es. (4).

Es. (6). $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}-x^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left\{\frac{4ac+b^2}{4c^2}-\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2\right\}}}.$$

Si ponga h^2 per $\frac{4ac+b^2}{4c^2}$ e z per $x-\frac{b}{2c}$, allora l' integrale diviene $\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dz}{\sqrt{(h^2-z^2)}}$, il quale dà $\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}^{-1}\frac{z}{h}$, o

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2cx-b}{\sqrt{(4ac+b^2)}}.$$

In modo simile, ponendo $z=x-\frac{b}{2c}$ possiamo far dipendere $\int\sqrt{(a+bx-cx^2)}\,dx$ dall'Es. (1).

Es. (7). $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

Si ponga $x=\frac{1}{y}$, allora $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}=\int\frac{1}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}\frac{dx}{dy}dy$

$$= -\int \frac{dy}{\sqrt{(1-a^2y^2)}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-y^2\right)}} = -\frac{1}{a}\,\text{sen}^{-1}ay$$

$$= -\frac{1}{a}\,\text{sen}^{-1}\frac{a}{x}.$$

Poichè $\text{sen}^{-1}\frac{a}{x} + \cos^{-1}\frac{a}{x} = \frac{\pi}{2}$, una costante, possiamo scrivere l'ultimo risultato anche così,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{x}.$$

Es. (8). $\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}$.

Ponendo $x = \frac{1}{y}$, come nell'Es. (7), deduciamo per il risultato richiesto

$$\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}.$$

Es. (9). $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$ ed $\int \frac{dx}{x-a}$.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}},$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a).$$

Questi sono ovvii se differenziamo i secondi membri.

Es. 10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$.

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}$$

$$= \frac{1}{2a} \log(x-a) - \frac{1}{2a} \log(x+a)$$

$$= \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}.$$

Questo suppone $\frac{x-a}{x+a}$ positivo; se $\frac{x-a}{x+a}$ fosse negativo, dovremmo scrivere

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a-x}{a+x}.$$

Es. (11). $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$.

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4c^2}}.$$

Se $\frac{4ac-b^2}{4c^2}$ è negativo, otteniamo l'integrale con l'Es. (10), cioè

$$\frac{1}{\sqrt{(b^2-4ac)}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2cx+b+\sqrt{(b^2-4ac)}}.$$

Se $\frac{4ac-b^2}{4c^2}$ è positivo, allora per l'Art. 9, l'integrale è

$$\frac{2}{\sqrt{(4ac-b^2)}} \tan^{-1} \frac{2cx+b}{\sqrt{(4ac-b^2)}}.$$

Es. (12). $\int \frac{Ax+B}{a+bx+cx^2} dx$.

$$\int \frac{Ax+B}{a+bx+cx^2} dx = \int \frac{Ax + \frac{Ab}{2c} + B - \frac{Ab}{2c}}{a+bx+cx^2} dx$$

$$= \frac{A}{2c} \int \frac{2cx+b}{a+bx+cx^2} dx + \left(B - \frac{Ab}{2c}\right) \int \frac{dx}{a+bx+cx^2}.$$

Il primo integrale è $\frac{A}{2c} \log(a+bx+cx^2)$, e l'altro è stato trovato nell'Es. (11).

Es. (13). $\int \frac{dx}{\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dz}{1-z^2}, \text{ se } z = \operatorname{sen} x,$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}, \text{ per l'Es. (10)},$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = \log\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

Similmente $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log\tan\frac{x}{2}$.

Es. (14). $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$, ed $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{sen} x}$.

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{dx}{a\left(\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{a+b+(a-b)\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= 2\int \frac{dz}{a+b+(a-b)z^2}, \text{ se } z = \tan\frac{x}{2}.$$

Quindi, se a è maggiore di b, l'integrale è

$$\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\tan^{-1}\frac{z\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)}} \text{ o } \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{(a-b)}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{(a+b)}};$$

e se a è minore di b,

$$\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log\frac{z\sqrt{(b-a)}+\sqrt{(b+a)}}{z\sqrt{(b-a)}-\sqrt{(b+a)}},$$

o $$\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log\frac{\sqrt{(b-a)}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{(b+a)}}{\sqrt{(b-a)}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{(b+a)}}.$$

Per trovare $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x}$ si ponga $x = \frac{\pi}{2} + z$; così l' integrale diviene $\int \frac{dx}{a + b \cos z}$, che è stato ora trovato. O puro possiamo procedere così,

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{a\left(\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) + 2b \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{a\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + 2b \tan \frac{x}{2}}$$

$$= 2\int \frac{dz}{a(1 + z^2) + 2bz}, \text{ se } z = \tan \frac{x}{2}.$$

Si ponga $y = z + \frac{b}{a}$, e l'integrale diviene

$$\frac{2}{a}\int \frac{dy}{y^2 + 1 - \frac{b^2}{a^2}};$$

e questo può essere trovato come prima.

In ciascuno di questi esempii, poichè abbiamo trovato l' integrale *indefinito*, possiamo determinare immediatamente l' integralo definito tra limiti assegnati. Per esempio, essendo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \log \{x + \sqrt{(x^2 + a^2)}\},$$

sarà

$$\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \log [2a + \sqrt{\{(2a)^2 + a^2\}}] - \log \{a + \sqrt{(a^2 + a^2)}\}$$

$$= \log \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}.$$

15. L' integrale $\int x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$ si può trovare immediatamente se $\frac{p}{q}$ è un intero positivo, infatti $(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$ si può allora sviluppare col teorema del binomio in una serie finita

di potenze di x, e ciascun termine del prodotto di questa serie per x^{m-1} sarà integrabile immediatamente. Vi sono anche due altri casi nei quali l'integrale si può trovare immediatamente.

Infatti si ponga $a + bx^n = t^q$;

onde $$x = \left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{qt^{q-1}}{nb}\left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}.$$

Quindi $$\int x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx = \int x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}\frac{dx}{dt}\,dt.$$

$$= \frac{q}{nb}\int t^{p+q-1}\left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}dt.$$

Se $\frac{m}{n}$ *è un intero positivo* possiamo sviluppare $(t^q - a)^{\frac{m}{n}-1}$ in una serie finita di potenze di t, e ciascun termine del prodotto di questa serie per t^{p+q-1} sarà integrabile immediatamente.

Inoltre, $$\int x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx = \int x^{\frac{pn}{q}+m-1}(ax^{-n} + b)^{\frac{p}{q}}\,dx;$$

e pel primo caso, se poniamo $ax^{-n} + b = t^q$, questo è integrabile immediatamente se

$$\frac{\frac{pn}{q} + m}{-n}$$

è un intero positivo; vale a dire, se $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ *è un intero negativo.*

Nel primo caso, se $\frac{m}{n}$ fosse un intero *negativo* l'integrale potrebbe ancora trovarsi, come vedremo nel capitolo seguente, e similmente, nel secondo caso, se $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ fosse un intero *positivo:* ma siccome in questi casi sono necessarie ulteriori riduzioni, non diciamo che le espressioni sono integrabili *immediatamente.*

Es. (1). $\int x^2(a + x)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

Quì $\frac{m}{n} = 3$: si prenda $a + x = t^2$; l'integrale diviene

$$2\int (t^2 - a)^2 t^2 dt \text{ o } 2\int (t^6 - 2at^4 + a^2t^2)\, dt,$$

che dà

$$2\left\{\frac{t^7}{7} - \frac{2at^5}{5} + \frac{a^2t^3}{3}\right\};$$

così $\int x^2 (a+x)^{\frac{1}{2}} dx = 2\,(a+x)^{\frac{3}{2}} \left\{\frac{(a+x)^2}{7} - \frac{2a}{5}(a+x) + \frac{a^2}{3}\right\}$.

Es. (2). $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Quì $m = -1 \quad n = 2, \quad \frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$,

onde $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = -1$.

Si ponga $x^{-2} + 1 = t^2$;

onde $x^2 = \frac{1}{t^2 - 1}$,

e $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

Adunque $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\frac{dx}{dt}}{x^3(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}} dt$.

Si sostituiscano per x e $\frac{dx}{dt}$ i loro valori, e questo diviene $-\int dt$, il quale $= -t$ o $-\frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$.

Es. (3). $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Quì $m = 1, \quad n = 2, \quad \frac{p}{q} = -\frac{3}{2}$,

onde $$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=-1.$$

Si ponga $$a^2x^{-2}+1=t^2,$$

onde $$x^2=\frac{a^2}{t^2-1},$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{at}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\frac{dx}{dt}}{x^3\,(a^2x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}\,dt=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{a^2t}$$

$$=\frac{x}{a^2\sqrt{(a^2+x^2)}}.$$

ESEMPII.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1-3x-x^2)}}=\text{sen}^{-1}\frac{3+2x}{\sqrt{13}}.$

2. $\displaystyle\int\log x\,dx=x\,(\log x-1).$

3. $\displaystyle\int x^n\log x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left\{\log x-\frac{1}{n+1}\right\}.$

4. $\displaystyle\int\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta=-\theta\cos\theta+\text{sen}\,\theta.$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\tan^{-1}(e^x).$

6. $\displaystyle\int\sqrt{\left(\frac{m+x}{x}\right)}\,dx=\sqrt{(mx+x^2)}+m\log\{\sqrt{x}+\sqrt{(m+x)}\}.$

   Questo si può trovare ponendo $x=z^2$.

7. $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx=\frac{1+x^2}{2}\tan^{-1}x-\tfrac{1}{2}x.$

8. $\displaystyle\int(1-\cos x)^2\,dx=\frac{3x}{2}-2\,\text{sen}\,x+\frac{\text{sen}\,2x}{4}.$

9. $$\int \frac{x\,dx}{(1-x)^3} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2}.$$

10. $$\int \frac{x^2 dx}{a^6 - x^6} = \frac{1}{6a^3} \log \frac{a^3 + x^3}{a^3 - x^3}.$$

11. $$\int \sqrt{(2ax - x^2)}\, dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x-a}{a}.$$

12. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = -\sqrt{(2ax - x^2)} + a \operatorname{vers}^{-1} \frac{x}{a}.$$

13. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 6x + 13)}} = \log \{x - 3 + \sqrt{(x^2 - 6x + 13)}\}.$$

14. $$\int \frac{1 + \cos x}{x + \operatorname{sen} x}\, dx = \log (x + \operatorname{sen} x).$$

15. $$\int \frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\, dx = x \tan \frac{x}{2}.$$

16. $$\int \frac{dx}{x (\log x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}}.$$

17. $$\int \frac{\log(\log x)}{x}\, dx = \log x \cdot \log(\log x) - \log x.$$

18. $$\int \frac{dx}{x + \sqrt{(x^2 - 1)}} = \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{(x^2-1)}}{2} + \tfrac{1}{2} \log \{x + \sqrt{(x^2 - 1)}\}.$$

19. $$\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{(x-1)}} = 2\sqrt{(x-1)} \left\{ \frac{(x-1)^3}{7} + \tfrac{3}{5}(x-1)^2 + x \right\}.$$

20. $$\int e^{ax} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = \frac{e^{ax}}{2} \frac{a \operatorname{sen}(m+n)x - (m+n)\cos(m+n)x}{a^2 + (m+n)^2}$$
$$+ \frac{e^{ax}}{2} \frac{a \operatorname{sen}(m-n)x - (m-n)\cos(m-n)x}{a^2 + (m-n)^2}.$$

21. $$\int e^{-x} \cos^3 x\, dx = \tfrac{1}{4} \int e^{-x} (\cos 3x + 3\cos x)\, dx$$
$$= \frac{e^{-x}}{40} (3 \operatorname{sen} 3x - \cos 3x) + \frac{3e^{-x}}{8} (\operatorname{sen} x - \cos x).$$

22. $\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{\pi a^2}{4}$.

23. $\int_0^{2a} \sqrt{(2ax - x^2)}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}$.

24. $\int_0^{2a} \text{vers}^{-1} \frac{x}{a}\, dx = \pi a$.

Si proceda così; si ponga $\text{vers}^{-1} \frac{x}{a} = \theta$, onde $x = a(1 - \cos\theta)$, e l'integrale diviene $\int_0^{\pi} a\theta \,\text{sen}\,\theta\, d\theta$.

25. $\int_0^{2a} x \,\text{vers}^{-1} \frac{x}{a}\, dx = \frac{5\pi a^2}{4}$.

26. $\int_0^{2a} x^2 \,\text{vers}^{-1} \frac{x}{a}\, dx = \frac{11\pi a^3}{6}$.

27. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{sen}^2\theta \cos^3\theta\, d\theta = \frac{2}{15}$.

28. $\int \frac{dx}{\text{sen}\,x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$.

29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(a + bx + cx^2)}}$.

Si ponga $x = \frac{1}{y}$ e questo diviene una forma conosciuta.

30. $\int \frac{\sqrt{(1 - x^2)}}{x^4} \text{sen}^{-1} x\, dx = -\frac{\text{sen}^{-1} x\,(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\log x}{3}$.

Questo si può ottenere ponendo $\text{sen}^{-1} x = \theta$.

31. $\int \frac{\text{sen}^{-1} x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \theta \tan\theta + \log\cos\theta$, in cui $\text{sen}\,\theta = x$.

32. $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{a^4}\left(\cot\theta + \frac{\cot^3\theta}{3}\right)$, in cui $x = a \cos\theta$.

33. $\int \frac{\text{sen}^2 x\, dx}{a + b\cos^2 x} = \left(\frac{a + b}{ab^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{a}\tan x}{\sqrt{(a + b)}} - \frac{x}{b}$.

34. $\int x^3 \sqrt{(a+bx^2)}\,dx = \left(\frac{a+bx^2}{5b^2} - \frac{a}{3b^2}\right)(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}.$

35. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{(2x^2-1)\sqrt{(1+x^2)}}{3x^3}.$

36. $\int \tan^{2n}\theta\,d\theta = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \int \tan^{2n-2}\theta\,d\theta$

$= \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \dots\dots - (-1)^n x + (-1)^n \theta,$

x essendo $= \tan\theta$.

37. Mostrare che $\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx$ ed $\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx$ sono zero se m ed n sono *interi disuguali*, ed $= \frac{\pi}{2}$ se m ed n sono *interi eguali*.

38. $\int\left\{\log\left(\frac{x}{a}\right)\right\}^3 dx = x\left\{\log\left(\frac{x}{a}\right)\right\}^3 - 3x\left\{\log\frac{x}{a}\right\}^2 + 6x\log\frac{x}{a} - 6x.$

39. $\int \frac{\cot^{-1}x}{x^2(1+x^2)}dx = \frac{\theta^2}{2} - \theta\tan\theta - \log\cos\theta$, in cui $\cot\theta = x$.

40. $\int \frac{2a+x}{a+x}\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}\,dx = \sqrt{(a^2-x^2)} - \frac{2a\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}}.$

41. $\int \frac{\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}}{\sqrt{(2ax-x^2)}}dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}\right)^2.$

42. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1+c\cos x} = \frac{1}{\sqrt{(1-c^2)}}\cos^{-1}c$, se c è minore di 1.

43. $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\theta}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{3}{10}\left(e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}\right).$

44. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{(1+3x^2+x^4)}}$. Si ponga $z = x + \frac{1}{x}$.

45. $\int \frac{(a+b^n)^{\frac{3}{4}}dx}{x}$. Si ponga $a + bx^n = z^4$.

CAPITOLO II.

FRAZIONI RAZIONALI.

16. Procediamo all'integrazione di espressioni come

$$\frac{A' + B'x + C'x^2 \ldots + M'x^m}{A + Bx + Cx^2 \ldots + Nx^n},$$

in cui $A, B, \ldots A', B', \ldots$ sono costanti, sicchè tanto il numeratore che il denominatore sono funzioni razionali finite di x. Se m è eguale ad n, o maggiore di n, possiamo con la divisione ridurre la precedente alla forma di una funzione intera di x, ed una frazione in cui il numeratore è di grado inferiore in x rispetto al denominatore. Siccome la funzione intera di x si può integrare immediatamente, possiamo limitarci al caso di una frazione che ha il suo numeratore almeno di una dimensione inferiore al suo denominatore. Per effettuare l'integrazione risolviamo la frazione in una serie di frazioni più semplici chiamate *frazioni parziali*, la possibilità delle quali procediamo a dimostrare.

Sia $\frac{U}{V}$ una frazione razionale nei suoi minimi termini la quale debba risolversi in una serie di frazioni parziali; si supponga V una funzione di x dell'n^{mo} grado, ed U una funzione di x dell'$(n-1)^{mo}$ grado al più; possiamo senza perdita di generalità supporre il coefficiente di x^n in V essere l'unità. Supponiamo

$$V = (x-a)(x-b)^r (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)(x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 + \delta^2)^s,$$

sicchè l'equazione $V = 0$ ha

(1) una radice reale $= a$,

(2) r radici reali eguali, ciascuna $= b$,

(3) una coppia di radici immaginarie $\alpha \pm \beta\sqrt{(-1)}$,

(4) s coppie di radici immaginarie, ciascuna essendo $\gamma \pm \delta\sqrt{(-1)}$.

Per la teoria delle equazioni V deve essere il prodotto di fattori della forma che abbiamo supposta, i fattori essendo più o meno in numero. Poichè V è dell'n^{mo} grado abbiamo

$$1+r+2+2s=n.$$

Si ponga

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)^r}+\frac{B_2}{(x-b)^{r-1}}+\frac{B_3}{(x-b)^{r-2}}\cdots\cdots+\frac{B_r}{x-b}$$
$$+\frac{Cx+D}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$$
$$+\frac{E_1x+F_1}{(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)^s}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)^{s-1}}\cdots+\frac{E_sx+F_s}{x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2},$$

in cui $A, B_1, B_2, \ldots C, D, E_1, \ldots$ sono costanti le quali, per giustificare il nostro assunto, dobbiamo mostrare che possano determinarsi in modo da rendere il secondo membro dell'equazione precedente *identicamente* eguale al primo. Se riduciamo tutte le frazioni parziali allo stesso denominatore e le uniamo insieme, abbiamo V per quel denominatore comune, e per numeratore una funzione di x del $(n-1)^{mo}$ grado. Se eguagliamo i coefficienti delle diverse potenze di x in questo numeratore con i coefficienti corrispondenti in U, avremo *n equazioni di primo grado per determinare le n quantità* $A, B_1, B_2, \ldots$ e con questi valori di $A, B_1, B_2, \ldots$ il secondo membro dell'equazione precedente diviene *identicamente eguale* al primo, e così $\frac{U}{V}$ è decomposta in una serie di frazioni parziali.

Se V contiene altri fattori semplici come $x-a$, ognuno di tali fattori darà origine ad una frazione come $\frac{A}{x-a}$, ed ogni fattore ripetuto come $(x-b)^r$ darà origine ad una serie di frazioni parziali della forma $\frac{B_1}{(x-b)^r}$, $\frac{B_2}{(x-b)^{r-1}}$, etc. In simil modo altri fattori della forma $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ o $(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)^s$ daranno origine ad una frazione o ad una serie di frazioni rispettivamente delle forme sopra indicate.

17. La dimostrazione data nell'Art. 16 non è molto soddisfacente, poichè non abbiamo dimostrato che le n equazioni

di primo grado che adoperiamo per determinare A, B_1, B_2, ... sono ***indipendenti*** e ***di accordo tra loro.***

Un metodo di maggior rigore è stato dato in un trattato sul Calcolo Integrale da Mr Homersham Cox, che qui indicheremo brevemente. Si supponga $F(x)$ contenere il fattore $x-a$ ripetuto n volte; abbiamo, se

$$F(x)=(x-a)^n\,\psi(x),$$

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\,\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}\psi(x)}{(x-a)^n\,\psi(x)}+\frac{\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}}{(x-a)^n}$$

Ora $\varphi(x)-\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}\psi(x)$ svanisce quando $x=a$, ed è perciò divisibile per $x-a$; supponiamo il quoziente dinotato da $\chi(x)$, allora

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)}=\frac{\chi(x)}{(x-a)^{n-1}\,\psi(x)}+\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\,\frac{1}{(x-a)^n}.$$

Questo procedimento può ora essere ripetuto su $\dfrac{\chi(x)}{(x-a)^{n-1}\psi(x)}$, e così con successive operazioni effettuata completamente la decomposizione di $\dfrac{\varphi(x)}{F(x)}$. In questa dimostrazione a può essere o una radice reale o una radice immaginaria dell'equazione $F(x)=0$; se $a=\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$, allora $\alpha-\beta\sqrt{(-1)}$ sarà anche una radice di $F(x)=0$; dinoti b questa radice, allora se addizioniamo le due frazioni parziali

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\,\frac{1}{(x-a)^n}\ \text{e}\ \frac{\varphi(b)}{\psi(b)}\,\frac{1}{(x-b)^n},$$

otterremo un risultato libero da $\sqrt{(-1)}$.

18. Rispetto all'integrazione di queste frazioni parziali ci riferiamo agli Esempii (9) e (12) dell'Art. 14 per tutte le forme eccetto $\dfrac{Lx+M}{(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)^m}$, e questa sarà data qui appresso.

Avendo dimostrato che una frazione razionale può essere decomposta nel modo supposto nell'Art. 16, possiamo far uso

di diversi artifizii algebrici per diminuire il lavoro della determinazione di A, B_1, B_2, etc. La più utile considerazione si è, che essendo il numeratore della frazione proposta *identicamente* eguale al numeratore formato aggiungendo insieme le frazioni parziali, se assegniamo un valore *qualunque* alla variabile x l'eguaglianza ancora sussiste.

19. *Determinare la frazione parziale corrispondente ad un fattore semplice di primo grado.*

Supponiamo che $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ rappresenti una frazione da decomporsi, e contenga $F(x)$ il fattore $x-a$ una volta; si ponga

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\chi(x)}{\psi(x)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1),$$

in cui A è una costante, e $\frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ rappresenta la somma di tutte le frazioni parziali eccetto $\frac{A}{x-a}$, ed $F(x) = (x-a)\psi(x)$.

Da (1)

$$\varphi(x) = A\psi(x) + (x-a)\chi(x) \;\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

In (2), che vale per ogni valore di x, si ponga $x=a$, allora

$$\varphi(a) = A\psi(a),$$

onde
$$A = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}.$$

Poichè $F'(x) = \psi(x) + (x-a)\psi'(x)$, abbiamo

$$F'(a) = \psi(a),$$

onde
$$A = \frac{\varphi(a)}{F'(a)}.$$

20. *Determinare le frazioni parziali corrispondenti ad un fattore di primo grado che è ripetuto.*

Supponiamo che $F(x)$ contenga un fattore $x-a$ ripetuto n volte, e sia $F(x) = (x-a)^n\psi(x)$. Si ponga

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_3}{(x-a)^{n-2}} \ldots\ldots + \frac{A_n}{x-a} + \frac{\chi(x)}{\psi(x)},$$

in cui $\frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ dinota la somma delle frazioni parziali che nascono dagli altri fattori di $F(x)$. Si moltiplichino ambo i lati dell'equazione per $(x-a)^n$ e si ponga $f(x)$ per $\frac{\varphi(x)}{F(x)}(x-a)^n$; così

$$f(x) = A_1 + A_2(x-a) + A_3(x-a)^2 \ldots + A_n(x-a)^{n-1} + \frac{\chi(x)}{\psi(x)}(x-a)^n.$$

Si differenziino successivamente i due membri di questa identità e si ponga $x = a$ *dopo* la differenziazione; allora

$$f(a) = A_1,$$
$$f'(a) = A_2,$$
$$f''(a) = 1 \cdot 2 A_3,$$
$$f'''(a) = \underline{|3} A_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{n-1}(a) = \underline{|n-1} A_n.$$

Così $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono determinati.

21. *Determinare le frazioni parziali corrispondenti ad una coppia di radici immaginarie che non è ripetuta.*

Dinoti $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ la frazione da decomporsi; ed $\alpha \pm \beta\sqrt{(-1)}$ una coppia di radici immaginarie; allora se dinotiamo queste radici con a e b e procediamo come nell'Art. 19, abbiamo per le frazioni parziali

$$\frac{\varphi(a)}{F'(a)} \frac{1}{x-a} \text{ e } \frac{\varphi(b)}{F'(b)} \frac{1}{x-b}.$$

Si supponga $\frac{\varphi(a)}{F'(a)} = A - B\sqrt{(-1)}$; allora poichè $\frac{\varphi(b)}{F'(b)}$ si può ottenere da $\frac{\varphi(a)}{F'(a)}$ cambiando il segno di $\sqrt{(-1)}$, dobbiamo avere $\frac{\varphi(b)}{F'(b)} = A + B\sqrt{(-1)}$. Quindi le frazioni sono

$$\frac{A - B\sqrt{(-1)}}{x - \alpha - \beta\sqrt{(-1)}} \text{ ed } \frac{A + B\sqrt{(-1)}}{x - \alpha + \beta\sqrt{(-1)}};$$

e la loro somma è

$$\frac{2A(x-\alpha) + 2B\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

22. O pure possiamo procedere così. Supponiamo che $x^2 - px + q$ dinoti il fattore quadratico che dà origine alla coppia di radici immaginarie $\alpha \pm \beta\sqrt{(-1)}$; allora si prenda

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{Lx + M}{x^2 - px + q} + \frac{\chi(x)}{\psi(x)},$$

sicchè $F(x) = (x^2 - px + q)\,\psi(x)$. Si moltiplichi per $F(x)$; così

$$\varphi(x) = (Lx + M)\,\psi(x) + (x^2 - px + q)\,\chi(x) \ldots\ldots (1).$$

Ora si attribuisca ad x l'uno o l'altro dei valori che annullano $x^2 - px + q$; allora (1) si riduce a

$$\varphi(x) = (Lx + M)\,\psi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora con la sostituzione ripetuta di $px - q$ per x^2 nei due membri di (2), avremo finalmente x a primo grado solamente, sicchè l'equazione prende la forma

$$Px + Q = P'x + Q'.$$

Ora si ponga per x il suo valore $\alpha + \beta\sqrt{(-1)}$ e si eguaglino i coefficienti delle parti impossibili; così

$$P = P' \text{ e quindi anche } Q = Q'.$$

Quì P e Q sono quantità note, e P' e Q' racchiudono le quantità ignote L ed M a primo grado solamente, sicchè abbiamo due equazioni di primo grado per trovare L ed M.

23. *Determinare le frazioni parziali corrispondenti ad una coppia di radici immaginarie che è ripetuta.*

Possiamo procedere come nell'Art. 20. O pure possiamo adottare il metodo seguente. Supponiamo che $x^2 - px + q$ dinoti il fattore quadratico che è ripetuto r volte; si prenda

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{L_r x + M_r}{(x^2-px+q)^r} + \frac{L_{r-1}x + M_{r-1}}{(x^2-px+q)^{r-1}} \ldots\ldots + \frac{L_1 x + M_1}{x^2-px+q} + \frac{\chi(x)}{\psi(x)},$$

sicchè $F(x) = (x^2 - px + q)^r \psi(x)$. Si moltiplichi per $F(x)$; così

$$\varphi(x) = (L_r x + M_r)\psi(x) + (L_{r-1}x + M_{r-1})(x^2 - px + q)\psi(x)$$
$$+ \ldots\ldots + (x^2 - px + q)^r \chi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ora si attribuisca ad x l'uno o l'altro dei valori cho annullano $x^2 - px + q$; così l'equazione si riduce a

$$\varphi(x) = (L_r x + M_r)\psi(x).$$

Si proceda come nell'Art. 22, e così si trovano L_r ed M_r. Allora da (1) con la trasposizione abbiamo

$$\varphi(x) - (L_r x + M_r)\psi(x) = (L_{r-1}x + M_{r-1})(x^2 - px + q)\psi(x) + \ldots$$

Il secondo membro ha $x^2 - px + q$ per fattore di ciascun termine; quindi siccome i due membri sono *identici* possiamo dividere per questo fattore. Dinoti $\varphi_1(x)$ il quoziente ottenuto a sinistra; allora

$$\varphi_1(x) = (L_{r-1}x + M_{r-1})\psi(x) + (L_{r-2}x + M_{r-2})(x^2 - px + q)\psi(x)$$
$$+ \ldots\ldots + (x^2 - px + q)^{r-1}\chi(x) \ldots\ldots\ldots (2).$$

Da (2) troviamo L_{r-1} ed M_{r-1} come sopra; allora con la trasposizione e la divisione

$$\varphi_2(x) = (L_{r-2}x + M_{r-2})\psi(x) + (L_{r-3}x + M_{r-3})(x^2 - px + q)\psi(x) + \ldots$$

e così di seguito finchè tutte le quantità siano determinate.

24. Prendiamo per esempio $\frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + x + 1)^2 (x + 1)^2}$. Si ponga eguale ad

$$\frac{L_2 x + M_2}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{L_1 x + M_1}{x^2 + x + 1} + \frac{\chi(x)}{(x + 1)^2};$$

allora $x^2 - 3x - 2 = (L_2 x + M_2)(x + 1)^2$

$$+ (L_1 x + M_1)(x^2 + x + 1)(x + 1)^2 + (x^2 + x + 1)^2 \chi(x) \ldots\ldots (1).$$

Si supponga $x^2+x+1=0$; così l'equazione si riduce ad

$$x^2-3x-2=(L_2x+M_2)(x+1)^2$$
$$=(L_2x+M_2)(x^2+2x+1).$$

Si ponga $-x-1$ per x^2; così

$$-4x-3=(L_2x+M_2)\,x=L_2x^2+M_2x$$
$$=-L_2(x+1)+M_2x;$$

onde $\quad -4=-L_2+M_2,\ \text{e}\ -3=-L_2;$

così $\quad L_2=3,\ \text{ed}\ M_2=-1.$

Da (1) con la trasposizione

$$x^2-3x-2-(3x-1)(x+1)^2$$
$$=(L_1x+M_1)(x^2+x+1)(x+1)^2+(x^2+x+1)^2\chi(x).$$

Il primo membro è $-3x^3-4x^2-4x-1$; si divida per x^2+x+1; così

$$-(3x+1)=(L_1x+M_1)(x+1)^2+(x^2+x+1)\,\chi(x)\ \ldots\ldots (2).$$

Di nuovo, si supponga $x^2+x+1=0$; così

$$-3x-1=(L_1x+M_1)(x^2+2x+1)=(L_1x+M_1)\,x$$
$$=-L_1(x+1)+M_1x;$$

onde $\quad -3=-L_1+M_1,\ \text{e}\ -1=-L_1;$

così $\quad L_1=1\ \text{ed}\ M_1=-2.$

In tal modo le frazioni parziali corrispondenti al fattore quadratico sono trovate. Le frazioni parziali corrispondenti al fattore $(x+1)^2$ possono quindi trovarsi con l'Art. 20. O pure possiamo ottenere da (2) con la trasposizione e la divisione per x^2+x+1

$$-(x-1)=\chi(x).$$

Così

$$\frac{\chi(x)}{(x+1)^2}=-\frac{x-1}{(x+1)^2}=-\frac{x+1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2};$$

onde

$$\frac{x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}=\frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x-2}{x^2+x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}.$$

25. Esempii. Si cerca l'integrale di $\frac{5x^3+1}{x^2-3x+2}$.

Con la divisione abbiamo

$$\frac{5x^3+1}{x^2-3x+2} = 5x + 15 + \frac{35x-29}{x^2-3x+2}.$$

Si prenda $$\frac{35x-29}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2};$$

onde $$35x - 29 = A(x-2) + B(x-1).$$

Si ponga x successivamente eguale ad 1 e a 2; allora

$$35 - 29 = -A, \text{ o } A = -6,$$
$$70 - 29 = B, \text{ o } B = 41;$$

onde $$\frac{5x^3+1}{x^2-3x+2} = 5x + 15 - \frac{6}{x-1} + \frac{41}{x-2};$$

onde $$\int \frac{5x^3+1}{x^2-3x+2}dx = \frac{5x^2}{2} + 15x - 6\log(x-1) + 41\log(x-2)$$

Si cerca l'integrale di $\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Poichè $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x-3)^2(x+1)$, prendiamo

$$\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{B_2}{x-3};$$

onde $$9x^2 + 9x - 128 = A(x-3)^2 + B_1(x+1) + B^2(x+1)(x-3).$$

Si ponga $x = 3$ ed a -1 successivamente, e troviamo

$$B_1 = -5, \quad A = -8.$$

Inoltre eguagliando i coefficienti di x^2, abbiamo

$$9 = A + B_2,$$

onde $$B_2 = 17;$$

onde

$$\int \frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}dx = -8\log(x+1) + \frac{5}{x-3} + 17\log(x-3).$$

Si cerca l'integrale di $\frac{x^2+1}{(x-1)^4(x^3+1)}$.

Si prenda $\frac{x^2+1}{(x-1)^4(x^3+1)}$

$$=\frac{A_1}{(x-1)^4}+\frac{A_2}{(x-1)^3}+\frac{A_3}{(x-1)^2}+\frac{A_4}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1};$$

onde $x^2+1=\{A_1+A_2(x-1)+A_3(x-1)^2+A_4(x-1)^3\}(x^3+1)$

$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^4 \ldots . (1).$$

Si ponga $x=1$, allora $\quad 2=2A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$;

onde $\quad A_1=1$.

Da (1) e (2) abbiamo con la sottrazione,

$$x^2-1=A_1(x^3-1)+\{A_2+A_3(x-1)+A_4(x-1)^2\}(x-1)(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^4 . .$$

Si divida per $x-1$, allora

$$x+1=A_1(x^2+x+1)+\{A_2+A_3(x-1)+A_4(x-1)^2\}(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^3 \ldots (3).$$

Si ponga $x=1$, allora $\quad 2=3A_1+2A_2 \ldots\ldots . (4)$;

onde $\quad A_2=-\frac{1}{2}$.

Da (3) e (4), con la sottrazione,

$$x-1=A_1(x^2+x-2)+A_2(x^3-1)+\{A_3+A_4(x-1)\}(x-1)(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^3.$$

Si divida per $x-1$, allora

$$1=A_1(x+2)+A_2(x^2+x+1)+\{A_3+A_4(x-1)\}(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^2 \ldots (5).$$

Si ponga $x=1$, allora $1=3A_1+3A_2+2A_3$.........(6);

onde $$A_3=-\frac{1}{4}.$$

Da (5) e (6), con la sottrazione,

$$0=A_1(x-1)+A_2(x^2+x-2)+A_3(x^3-1)+A_4(x-1)(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^2.$$

Si divida per $x-1$, allora

$$0=A_1+A_2(x+2)+A_3(x^2+x+1)+A_4(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)\ldots\ldots(7).$$

Si ponga $x=1$, allora $0=A_1+3A_2+3A_3+2A_4$...(8);

onde $$A_4=\frac{5}{8}.$$

Da (7) ed (8), con la sottrazione,

$$0=A_2(x-1)+A_3(x^2+x-2)+A_4(x^3-1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1).$$

Si divida per $x-1$, allora

$$0=A_2+A_3(x+2)+A_4(x^2+x+1)$$
$$+B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\ldots\ldots\ldots(9).$$

Si ponga $x=-1$, allora

$$0=A_2+A_3+A_4+3B\ldots\ldots\ldots\ldots(10);$$

onde $$B=\frac{1}{24}.$$

Da (9) e (10), con la sottrazione,

$$0=A_3(x+1)+A_4(x^2+x)+B(x^2-x-2)+(Cx+D)(x+1).$$

Si divida per $x+1$, allora

$$0=A_3+A_4x+B(x-2)+Cx+D\ \ldots\ldots(11).$$

Si ponga $x=0$, allora

$$A_3-2B+D=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12);$$

onde $$D=\frac{1}{3}.$$

Da (11) e (12), con la sottrazione,

$$A_1 + B + C = 0;$$

onde $$C = -\frac{2}{3};$$

onde $$\frac{x^2+1}{(x-1)^4(x^3+1)} = \frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{2(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{5}{8(x-1)} + \frac{1}{24(x+1)} - \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)};$$

onde $$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x-1)^4(x^3+1)} = -\frac{1}{3(x-1)^3} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{5}{8}\log(x-1) + \frac{1}{24}\log(x+1) - \frac{1}{3}\log(x^2-x+1).$$

26. Daremo come esempii addizionali l'integrazione di $\frac{x^{m-1}}{x^n \pm 1}$, supponendo m ed n interi positivi, ed $m-1$ minore di n.

Si cerca l'integrale di $\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$, n essendo supposto pari.

Per la teoria delle equazioni le radici reali di $x^n - 1 = 0$ sono 1 e -1, e le radici immaginarie sono date dall'espressione $\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)}\operatorname{sen} r\theta$, in cui $\theta = \frac{\pi}{n}$, ed r prende successivamente i valori 2, 4, ... sino ad $n-2$. Ora per l'Art. 19 se $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ è la frazione da decomporsi, la frazione parziale corrispondente alla radice a è $\frac{\varphi(a)}{F'(a)}\frac{1}{x-a}$. Nel caso attuale

$$\frac{\varphi(a)}{F'(a)} = \frac{a^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{a^m}{na^n} = \frac{a^m}{n}, \text{ poichè } a^n = 1.$$

Quindi corrispondente alla radice 1 abbiamo la frazione parziale $\frac{1}{n(x-1)}$, e corrispondente alla radice -1 abbiamo la frazione parziale $\frac{(-1)^m}{n(x+1)}$. E corrispondenti alla coppia di radici

$$\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)}\operatorname{sen} r\theta$$

abbiamo

$$\frac{\{\cos r\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}^m}{n\,\{x - \cos r\theta - \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}} + \frac{\{\cos r\theta - \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}^m}{n\,\{x - \cos r\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}},$$

cioè

$$\frac{\cos mr\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, mr\theta}{n\,\{x - \cos r\theta - \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}} + \frac{\cos mr\theta - \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, mr\theta}{n\,\{x - \cos r\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}},$$

cioè $$\frac{2\cos mr\theta\,(x - \cos r\theta) - 2\,\mathrm{sen}\, mr\theta\,\mathrm{sen}\, r\theta}{n\,(x^2 - 2x\cos r\theta + 1)}.$$

Così $$\frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n\,(x-1)} + \frac{(-1)^m}{n\,(x+1)}$$

$$+ \frac{2}{n}\,\Sigma\,\frac{\cos mr\theta\,(x - \cos r\theta) - \mathrm{sen}\, mr\theta\,\mathrm{sen}\, r\theta}{(x - \cos r\theta)^2 + \mathrm{sen}^2 r\theta},$$

in cui Σ indica una somma da formarsi dando ad r tutt'i valori interi pari da 2 ad $n-2$ inclusivamente. Quindi

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\log(x-1) + \frac{(-1)^m}{n}\log(x+1)$$

$$+ \frac{1}{n}\,\Sigma \cos mr\theta \log(x^2 - 2x\cos r\theta + 1) - \frac{2}{n}\,\Sigma\,\mathrm{sen}\, mr\theta \tan^{-1}\frac{x - \cos r\theta}{\mathrm{sen}\, r\theta}.$$

27. Si cerca l'integrale di $\dfrac{x^{m-1}}{x^n - 1}$, n essendo supposto dispari.

La radice reale di $x^n - 1 = 0$ è 1, e le radici immaginarie sono date dall'espressione $\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta$, in cui $\theta = \dfrac{\pi}{n}$, ed r prende successivamente i valori $2, 4, \ldots$ sino ad $n-1$. Quindi come sopra troveremo

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\log(x-1) + \frac{1}{n}\,\Sigma \cos mr\theta \log(x^2 - 2x\cos r\theta + 1)$$

$$- \frac{2}{n}\,\Sigma\,\mathrm{sen}\, mr\theta \tan^{-1}\frac{x - \cos r\theta}{\mathrm{sen}\, r\theta}.$$

28. Si cerca l'integrale di $\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$, n essendo supposto pari.

L'equazione $x^n+1=0$ non ha ora radici reali; le radici immaginarie sono date dall'espressione $\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)} \operatorname{sen} r\theta$, in cui $\theta = \frac{\pi}{n}$, ed r prende successivamente i valori $1, 3 \ldots$ sino ad $n-1$. E se a è una radice di $x^n+1=0$, abbiamo

$$\frac{\varphi(a)}{F'(a)} = \frac{a^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{a^m}{na^n} = -\frac{a^m}{n};$$

così la somma delle due frazioni corrispondenti ad una coppia di radici immaginarie è

$$\frac{2}{n} \frac{\cos mr\theta\,(x-\cos r\theta) - \operatorname{sen} mr\theta \operatorname{sen} r\theta}{(x-\cos r\theta)^2 + \operatorname{sen}^2 r\theta}.$$

Quindi

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n+1} = -\frac{1}{n} \Sigma \cos mr\theta \log(x^2 - 2x\cos r\theta + 1)$$

$$+\frac{2}{n} \Sigma \operatorname{sen} mr\theta \tan^{-1} \frac{x-\cos r\theta}{\operatorname{sen} r\theta},$$

in cui Σ indica una somma da formarsi dando ad r tutt'i valori interi dispari da 1 ad $n-1$ inclusivamente.

29. Si cerca l'integrale di $\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$, n essendo supposto dispari.

La radice reale di $x^n+1=0$ è in questo caso -1, e le radici immaginarie sono date dall'espressione $\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)} \operatorname{sen} r\theta$, in cui $\theta = \frac{\pi}{n}$ ed r prende successivamente i valori $1, 3, \ldots$ sino ad $n-2$. Quindi otterremo

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n+1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n} \log(x+1)$$

$$-\frac{1}{n} \Sigma \cos mr\theta \log(x^2 - 2x\cos r\theta + 1) + \frac{2}{n} \Sigma \operatorname{sen} mr\theta \tan^{-1} \frac{x-\cos r\theta}{\operatorname{sen} r\theta}.$$

ESEMPII.

1. $\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

2. $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx = x + \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{3}{4}}.$

3. $\int \frac{x^3\,dx}{x^2+7x+12} = \frac{x^2}{2} - 7x + 64\log(x+4) - 27\log(x+3).$

4. $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{4a^3}\log\frac{a+x}{a-x}.$

5. $\int \frac{2x^2-3a^2}{x^4-a^4}dx = \frac{5}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{4a}\log\frac{x-a}{x+a}.$

6. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{2}\log\frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

7. $\int \frac{x^2dx}{x^4+x^2-2} = \frac{1}{6}\log\frac{x-1}{x+1} + \frac{\sqrt{2}}{3}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}.$

8. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}.$

9. $\int \frac{x^2-3x+3}{(x-1)(x-2)}dx = x + \log\frac{x-2}{x-1}.$

10. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \frac{1}{2}\log x + \frac{5}{6}\log(x-2) - \frac{4}{3}\log(x+1).$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x+b)} = \frac{1}{b^2+a^2}\left\{\log\frac{x+b}{\sqrt{(x^2+a^2)}} + \frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right\}.$

12. $\int \frac{dx}{x(1+x+x^2+x^3)} = \log x - \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{4}\log(1+x^2)$

$- \frac{1}{2}\tan^{-1}x.$

13. $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2}\log(x-1)$$
$$+\frac{1}{4}\tan^{-1}x - \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\log(x^2+1).$$

14. $$\int \frac{xdx}{(1+x)(1+2x)^2(1+x^2)} = \frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{2}\log(1+x)$$
$$-\frac{7}{100}\log(1+x^2) + \frac{16}{25}\log(1+2x) + \frac{1}{50}\tan^{-1}x.$$

15. $$\int \frac{x^2dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\{\tan^{-1}(x\sqrt{2}+1)+\tan^{-1}(x\sqrt{2}-1)\}.$$

16. $$\int \frac{x^3dx}{x^6+1} = \frac{1}{12}\log(x^4-x^2+1) - \frac{1}{6}\log(x^2+1)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\{\tan^{-1}(2x-\sqrt{3})-\tan^{-1}(2x+\sqrt{3})\}.$$

17. $\int \frac{dy}{\sqrt[3]{(1-y^3)}}$. Si prenda $1-y^3=y^3z^3$.

18. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{(1+3x+3x^2)}}$. Si prenda $y=\frac{x}{1+x}$.

CAPITOLO III.

FORMOLE DI RIDUZIONE.

30. Sia $a+bx^n$ dinotato con X; per mezzo dell'integrazione per parti abbiamo

$$\int x^{m-1} X^p\,dx = \frac{X^p x^m}{m} - \int \frac{x^m}{m} p X^{p-1} \frac{dX}{dx}\,dx$$
$$= \frac{X^p x^m}{m} - \frac{bnp}{m}\int x^{m+n-1} X^{p-1}\,dx \ldots\ldots (1)$$

L'equazione (1) si chiama una *formola di riduzione*; per mezzo di essa si fa dipendere l'integrale di $x^{m-1}X^p$ da quello di $x^{m+n-1}X^{p-1}$. Nello stesso modo l'ultimo integrale si può far dipendere da quello di $x^{m+2n-1}X^{p-2}$; e così, se p è un intero possiamo procedere sino a che si arrivi ad $x^{m+np-1}X^{p-p}$, cioè x^{m+np-1}, che è integrabile immediatamente.

Da (1), con la trasposizione,

$$\int x^{m+n-1} X^{p-1}\,dx = \frac{x^m X^p}{bnp} - \frac{m}{bnp}\int x^{m-1} X^p\,dx.$$

Si muti m in $m-n$ e p in $p+1$; così

$$\int x^{m-1} X^p\,dx = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{bn\,(p+1)} - \frac{m-n}{bn\,(p+1)}\int x^{m-n-1} X^{p+1}\,dx \ldots (2).$$

Questa formola si può adoperare quando desideriamo far dipendere l'integrale di $x^m X^p$ da un altro nel quale l'esponente di x è diminuito e quello di X aumentato. Per esempio, se $m=3$, $n=2$, e $p=-\frac{3}{2}$, abbiamo

$$\int \frac{x^2 dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{b\sqrt{(a+bx^2)}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}.$$

L'ultimo integrale è stato già determinato, e così la proposta integrazione è effettuata.

Poichè $\int x^{m-1} X^p \, dx = \int x^{m-1} X^{p-1} (a + bx^n) \, dx$

$$= a \int x^{m-1} X^{p-1} dx + b \int x^{m+n-1} X^{p-1} dx;$$

abbiamo da (1)

$$\frac{x^m X^p}{m} - \frac{bnp}{m} \int x^{m+n-1} X^{p-1} dx = a \int x^{m-1} X^{p-1} dx + b \int x^{m+n-1} X^{p-1} dx,$$

onde $\int x^{m-1} X^{p-1} dx = \frac{x^m X^p}{am} - \frac{b(m+np)}{am} \int x^{m+n-1} X^{p-1} dx.$

Si muti p in $p+1$, ed abbiamo

$$\int x^{m-1} X^p dx = \frac{x^m X^{p+1}}{am} - \frac{b(m+np+n)}{am} \int x^{m+n-1} X^p dx \ldots (3).$$

Si muti m in $m-n$ e si trasponga, allora

$$\int x^{m-1} X^p dx = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{b(m+np)} - \frac{(m-n)a}{b(m+np)} \int x^{m-n-1} X^p dx \ldots\ldots (4).$$

Abbiamo già ottenuto da (1) con la trasposizione

$$\int x^{m+n-1} X^{p-1} dx = \frac{x^m X^p}{bnp} - \frac{m}{bnp} \int x^{m-1} X^p dx;$$

inoltre $\int x^{m-1} X^p dx = a \int x^{m-1} X^{p-1} dx + b \int x^{m+n-1} X^{p-1} dx;$

onde $\int x^{m-1} X^p dx = a \int x^{m-1} X^{p-1} dx + \frac{x^m X^p}{np} - \frac{m}{np} \int x^{m-1} X^p dx;$

onde $\int x^{m-1} X^p dx = \int \frac{x^m X^p}{m+np} + \frac{anp}{m+np} \int x^{m-1} X^{p-1} dx \ldots (5).$

Si muti p in $p+1$ e si trasponga; così

$$\int x^{m-1} X^p dx = -\frac{x^m X^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+np+n}{an(p+1)} \int x^{m-1} X^{p+1} dx \ldots (6),$$

31. Allorchè si propone un esempio al quale è applicabile una delle formole precedenti, possiamo o adoperare quella formola particolare o pure ottenere il risultato richiesto indipendentemente. Così, supponiamo si cerchi $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$; abbiamo

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = -\int \frac{d\sqrt{(c^2-x^2)}}{dx}\, x^{m-1}\, dx$$

$$= -\sqrt{(c^2-x^2)}\, x^{m-1} + (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{(c^2-x^2)}\, dx$$

$$= -\sqrt{(c^2-x^2)}\, x^{m-1} + (m-1)\int \frac{(c^2-x^2)\, x^{m-2}\, dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}.$$

Con la trasposizione,

$$(1+m-1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = -\sqrt{(c^2-x^2)}\, x^{m-1} + (m-1)c^2\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}},$$

onde

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{(c^2-x^2)}}{m} + \frac{(m-1)c^2}{m}\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} \quad \ldots (1).$$

Questo risultato si accorda con l'equazione (4) dell'articolo precedente se facciamo $a = c^2$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, e mutiamo m in $m+1$.

Inoltre, supponiamo si cerchi $\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(a^2+x^2)}}$. Abbiamo

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(a^2+x^2)}} = \int \frac{d\sqrt{(a^2+x^2)}}{dx}\, \frac{1}{x^{m+1}}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{x^{m+1}} + (m+1)\int \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{x^{m+2}}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{x^{m+1}} + (m+1)\int \frac{a^2+x^2}{x^{m+2}\sqrt{(a^2+x^2)}}\, dx.$$

Con la trasposizione,

$$(m+1)\, a^2\int \frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{(a^2+x^2)}} = -\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{x^{m+1}} - m\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(a^2+x^2)}},$$

e mutando m in $m-2$ otteniamo

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a^2+x^2)}} = -\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{(m-1)a^2 x^{m-1}} - \frac{m-2}{(m-1)a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Un altro esempio è fornito da $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, il quale si può scrivere $\int \frac{x^{m-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(2a-x)}}$; se nell'equazione (4) dell'articolo precedente facciamo $b=-1$, $n=1$, $p=-\frac{1}{2}$, e mutiamo a ed m in $2a$ ed $m+\frac{1}{2}$ rispettivamente, abbiamo

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{(2ax-x^2)}}{m} + \frac{a(2m-1)}{m}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

il che del resto può ottenersi indipendentemente.

32. Nell'equazione (6) dell'Art. 30 si ponga $a=c^2$, $m=1$, $n=2$, $b=1$, e $p=-r$; così

$$\int \frac{dx}{(x^2+c^2)^r} = \frac{x}{2(r-1)c^2(x^2+c^2)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2(r-1)c^2}\int \frac{dx}{(x^2+c^2)^{r-1}}.$$

Questa formola serve per ridurre la forma

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^r},$$

che s'incontra nell'Art. 18; poichè quest'ultima espressione si può scrivere così,

$$\int \frac{A(x-\alpha)\,dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r},$$

cioè

$$-\frac{A}{2(r-1)}\,\frac{1}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{r-1}} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r}.$$

Ponendo $x-\alpha=x'$, abbiamo

$$\int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r} = \int \frac{dx'}{\{x'^2+\beta^2\}^r},$$

e così la formola precedente diviene applicabile.

33. Queste formole di riduzione sono molto utili quando l'integrale deve essere preso tra certi limiti. Si suppongano $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, funzioni di x, tali che

$$\int \varphi(x)\,dx = \chi(x) + \int \psi(x)\,dx,$$

allora
$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \chi(b) - \chi(a) + \int_a^b \psi(x)\,dx,$$

come è ovvio per l'Art. 3.

Per esempio, si può mostrare che

$$\int (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \frac{x(c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{nc^2}{n+1}\int (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx;$$

si supponga $\frac{n}{2}$ una quantità *positiva*, allora $x(c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}$ svanisce per $x = 0$ e per $x = c$. Quindi

$$\int_0^c (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \frac{nc^2}{n+1}\int_0^c (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx.$$

Il seguente è un esempio analogo. Con l'integrazione per parti

$$\int x^{r-1}(1-x)^{n-1}\,dx = -\frac{(1-x)^n}{n}x^{r-1} + \frac{r-1}{n}\int x^{r-2}(1-x)^n\,dx.$$

Quindi
$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{r-1}{n}\int_0^1 x^{r-2}(1-x)^n\,dx.$$

Così se r è un intero possiamo ridurre l'integrale ad $\int_0^1 (1-x)^{n+r-2}\,dx$, cioè ad $\frac{1}{n+r-1}$; quindi

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{(r-1)(r-2)\ldots\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}$$

34. L'integrazione delle funzioni trigonometriche è facilitata dalle formole di riduzione. Dinoti $\varphi(\operatorname{sen}x, \cos x)$ una

funzione di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$; allora se poniamo $\operatorname{sen} x = z$, abbiamo

$$\int \varphi\,(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int \varphi\,\{z, \sqrt{(1-z^2)}\}\,\frac{dx}{dz}\,dz$$

$$= \int \varphi\,\{z, \sqrt{(1-z^2)}\}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} \ldots\ldots\ldots (1).$$

Per esempio, sia $\varphi\,(\operatorname{sen} x,\ \cos x) = \operatorname{sen}^p x \cos^q x$; allora

$$\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx = \int z^p\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dz \ldots\ldots (2).$$

Se nelle sei formole dell'Art. 30 poniamo $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}(q-1)$, abbiamo

$$\int z^{m-1}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dz$$

$$= \frac{z^m\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{m} + \frac{q-1}{m}\int z^{m+1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dz$$

$$= -\frac{z^{m-2}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{q+1} + \frac{m-2}{q+1}\int z^{m-3}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}\,dz$$

$$= \frac{z^m\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{m} + \frac{m+q+1}{m}\int z^{m+1}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dz$$

$$= -\frac{z^{m-2}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{m+q-1} + \frac{m-2}{m+q-1}\int z^{m-3}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dz$$

$$= \frac{z^m\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{m+q-1} + \frac{q-1}{m+q-1}\int z^{m-1}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dz$$

$$= -\frac{z^m\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{q+1} + \frac{m+q+1}{q+1}\int z^{m-1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}\,dz.$$

Se poniamo $m = p+1$, e $z = \operatorname{sen} x$, la prima delle precedenti equazioni diviene

$$\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \operatorname{sen}^{p+2} x \cos^{q-2} x\,dx,$$

e similmente si possono esprimere le altre cinque equazioni.

35. Il caso seguente è molto importante:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\int \frac{d\cos x}{dx} \operatorname{sen}^{n-1} x\,dx$$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int (1-\operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

Trasponendo, abbiamo

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx;$$

onde $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$

Dall'ultima equazione deduciamo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

Similmente $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx = \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-4} x\,dx.$

Procedendo così, se n è un intero *pari* arriveremo ad $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx$ o $\frac{1}{2}\pi$; se n è un intero *dispari* arriveremo ad $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} x\,dx$, che è l'unità. Quindi, se n è un intero,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 1}{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots 2}\,\frac{\pi}{2} \quad (n \text{ pari}),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 2}{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots 3} \quad (n \text{ dispari}).$$

Questi due risultati sussistono se mutiamo $\operatorname{sen} x$ in $\cos x$, come si troverà facilmente.

36. Dai risultati precedenti possiamo dedurre un importante teorema, chiamato la Formola di Wallis.

Si supponga n pari; allora

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdots\cdots (1),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-1} x\, dx = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-5} \cdots\cdots \frac{2}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

Ora è chiaro che $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-1} x\, dx$ è minore di $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$ e maggiore di $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n} x\, dx$; poichè ciascun elemento del primo integrale è minore del corrispondente elemento del secondo integrale e maggiore del corrispondente elemento del terzo integrale. Ed è stato mostrato che

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx} = \frac{n-1}{n}.$$

Adunque $\dfrac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-1} x\, dx}$ è minore di 1 e maggiore di $\dfrac{n-1}{n}$.

Quindi il rapporto del secondo membro di (1) al secondo membro di (2) è minore dell'unità e maggiore di $\frac{n-1}{n}$; così

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots\cdots (n-2)(n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots\cdots (n-3)(n-1)},$$

$$e < \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots\cdots (n-2)(n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots\cdots (n-3)(n-1)} \frac{n}{n-1}.$$

ESEMPII.

1. $\int (a^2+x^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{n(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1} \int (a^2+x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx.$

2. $$\int x^m \sqrt{(2ax - x^2)}\, dx = -\frac{x^{m-1}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2} + \frac{a(2m+1)}{m+2}\int x^{m-1}\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx.$$

3. $$\int x\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = -\frac{1}{3}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} + a\int \sqrt{(2ax-x^2)}\, dx.$$

4. $$\int_0^{2a} x\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = \frac{\pi a^3}{2}.$$

5. $$\int x^2\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = -\frac{x}{4}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5a}{4}\int x\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx.$$

6. $$\int_0^{2a} x^2\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = \frac{5\pi a^4}{8}.$$

7. $$\int_0^{2a} x^3\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = \frac{7\pi a^5}{8}.$$

8. $$\int x^n(\log x)^m\, dx = \frac{x^{n+1}(\log x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\log x)^{m-1}\, dx.$$

9. $$\int x^n(\log x)^2\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left\{(\log x)^2 - \frac{2}{n+1}\log x + \frac{2}{(n+1)^2}\right\}.$$

10. $$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4\theta\, d\theta = \frac{4}{3}.$$

11. $$\int_0^a \frac{x^2\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}}\, dx = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)a^3.$$

12. $$\int \operatorname{sen}^3\theta\cos^3\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\cos^4\theta + \frac{1}{6}\cos^6\theta.$$

13. $$\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^4\theta\cos^4\theta} = 3(\tan\theta - \cot\theta) + \frac{1}{3}(\tan^3\theta - \cot^3\theta).$$

14. $$\int \frac{\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{1}{4}\log\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}.$$

15. $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \, d\theta = \frac{3\pi\sqrt{(2)}}{16}$.

Si prenda $\sqrt{(2)} \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\varphi$.

16. $\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)} \cos^{-1}\frac{x}{a} dx = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)\frac{a^2}{4}$.

17. $\int_0^{2a} \left(\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = (\pi^2 - 4)\, a$.

18. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{1 + c\cos x} = \frac{c^2 - 1}{c^3} \log(1 + c) + \frac{2 - c}{2c^2}$.

19. Se $\varphi(n) = \int (1 + c\cos x)^{-n} dx$, mostrare che

$$(n - 1)(1 - c^2)\varphi(n) = -c \operatorname{sen} x (1 + c\cos x)^{-n+1}$$
$$+ (2n - 3)\varphi(n - 1) - (n - 2)\varphi(n - 2).$$

20. $\int_0^{2a} \sqrt{(2ax - x^2)} \operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a} dx = \frac{\pi^2 a^2}{4}$.

21. $\int_0^{2a} x\sqrt{(2ax - x^2)} \operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a} dx = \frac{4a^3}{9} + \frac{\pi^2 a^3}{4}$.

22. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\tan x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{5}{12} - \frac{1}{2}\log 2$.

23. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 x)}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c^6 + \ldots\right\}$

c essendo < 1.

24. Sia $P = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$, $V_{m,n} = \int x^m P^n dx$,

$\alpha = m + 1 + na$, $\beta = m + 1 + nb$, $\gamma = m + 1 + nc \ldots$

Allora

$$V_{m,n} = A V_{m+a,n-1} + B V_{m+b,n-1} + C V_{m+c,n-1} + \ldots$$
$$x^{m+1} P^n = \alpha A V_{m+a,n-1} + \beta B V_{m+b,n-1} + \gamma C V_{m+c,n-1} + \ldots$$

(*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. III. p. 242).

CAPITOLO IV.

OSSERVAZIONI DIVERSE.

37. Nel principio di questo libro abbiamo definito l'*integrale* di $\varphi(x)$ tra limiti assegnati a e b come il limite di una certa somma $\Sigma\varphi(x)\Delta x$, ed abbiamo dinotato questo limite con $\int_a^b \varphi(x)\,dx$. Abbiamo mostrato che questo limite si conosce appena conosciamo la funzione $\psi(x)$ di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale. Nelle pagine immediatamente seguenti demmo dei metodi per trovare $\psi(x)$ in diversi casi. Aggiungeremo ora varie osservazioni e proposizioni, alcune delle quali richiameranno l'attenzione dello studente sul procedimento di sommazione che ponemmo alla base del soggetto.

38. Supponiamo che si voglia trovare l'integrale di $\operatorname{sen} x$ tra i limiti a e b *immediatamente dalla definizione*. Per l'Art. 4 dobbiamo trovare il limite quando n è infinito di

$$h[\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) \ldots\ldots + \operatorname{sen}\{a+(n-1)h\}],$$

in cui $h = \frac{1}{n}(b-a)$.

Si conosce dalla Trigonometria che questa serie

$$= \frac{h \operatorname{sen}\left(a + \frac{n-1}{2}h\right) \operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}} = \frac{h \operatorname{sen}\left(a + \frac{b-a}{2} - \frac{h}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{b-a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}.$$

Il limite di $\frac{h}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}$ quando n è infinito e quindi h zero è

2; quindi il richiesto integrale è

$$2 \operatorname{sen} \frac{b+a}{2} \operatorname{sen} \frac{b-a}{2} = \cos a - \cos b.$$

39. Si cerca il limite quando n diviene infinito della serie

$$\frac{n}{n^2} + \frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \frac{n}{3^2+n^2} \ldots\ldots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2}.$$

Questa serie può essere scritta

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2} \ldots\ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right\};$$

ponendo h per $\frac{1}{n}$, otteniamo

$$h\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+h^2} + \frac{1}{1+(2h)^2} \ldots\ldots + \frac{1}{1+(n-1)^2 h^2}\right\}.$$

Paragonando questo con l'Art. 4 vediamo che il limite richiesto è quello che dinotiamo con $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Ora $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$; quindi $\frac{\pi}{4}$ è il limite cercato.

40. Per definizione $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ è il limite quando n diviene infinito di

$$h_1 \varphi(a) + h_2 \varphi(x_1) \ldots\ldots + h_n \varphi(x_{n-1}).$$

Ora siano A e B il massimo ed il minimo valore che prende $\varphi(x)$ tra i limiti a e b; allora la serie è minore di

$$(h_1 + h_2 + \ldots\ldots + h_n)\, A,$$

ed è maggiore di

$$(h_1 + h_2 + \ldots\ldots + h_n) B;$$

vale a dire, la serie è compresa tra

$$(b - a) A \text{ e } (b - a) B.$$

Il limite deve perciò essere eguale a $(b - a) C$, in cui C è una certa quantità compresa tra A e B; ma poichè $\varphi(x)$ si suppone continua, essa deve, mentre x passa da a a b, passare per ogni valore compreso tra A e B, e deve quindi essere eguale a C quando x ha un certo valore tra a e b. Adunque $C = \varphi \{ a + \theta (b - a) \}$, in cui θ è una certa frazione propria, ed

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = (b - a) \varphi \{ a + \theta (b - a) \}.$$

Similmente se $\psi(x)$ ritiene lo stesso segno mentre x giace tra a e b, possiamo dimostrare che

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x)\, dx = \varphi \{ a + \theta (b - a) \} \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

41. La verità dell'equazione

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^c \varphi(x)\, dx + \int_c^b \varphi(x)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

apparirà immediatamente; infatti si supponga essere $\psi(x)$ l'integrale di $\varphi(x)$, allora abbiamo a sinistra

$$\psi(b) - \psi(a),$$

ed a dritta

$$\psi(c) - \psi(a) + \psi(b) - \psi(c).$$

In simil modo l'equazione

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = - \int_b^a \varphi(x)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

si rende evidente. Possiamo mostrare ancora che

$$\int_0^a \varphi(x)\, dx = \int_0^a \varphi(a - x)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Infatti ponendo $a - x = z$ abbiamo

$$\int \varphi(a-x)\,dx = -\int \varphi(z)\,dz,$$

onde

$$\int_0^a \varphi(a-x)\,dx = -\int_a^0 \varphi(z)\,dz$$

$$= \int_0^a \varphi(z)\,dz, \text{ per } (2).$$

Evidentemente $\int_0^a \varphi(z)\,dz = \int_0^a \varphi(x)\,dx$, essendo indifferente lo usare il simbolo x o pure z nell'ottenere un risultato che non deve racchiudere x o z.

Abbiamo da (1)

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = \int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_a^{2a} \varphi(x)\,dx.$$

Il secondo integrale, cangiando x in $2a - x'$, si troverà eguale ad

$$\int_0^a \varphi(2a - x')\,dx' \text{ o } \int_0^a \varphi(2a - x)\,dx.$$

Quindi

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = \int_0^a \{\varphi(x) + \varphi(2a - x)\}\,dx.$$

Quindi, se $\varphi(x) = \varphi(2a - x)$ per tutt' i valori di x compresi tra 0 ed a, abbiamo

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = 2\int_0^a \varphi(x)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

e se $\varphi(2a - x) = -\varphi(x)$, abbiamo

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Per esempio,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta \ldots\ldots \text{ per } (4),$$

ed $$\int_0^{\pi} \cos^3\theta \, d\theta = 0 \ldots\ldots \text{per } (5).$$

42. Le equazioni come quelle date or ora debbono essere considerate attentamente dallo studente, ed egli non deve lasciarle sino a che non abbia riconosciuta la loro ovvia ed evidente verità. $\int_0^{\pi} \cos^3\theta \, d\theta$ è per definizione il limite quando n diviene infinito della serie

$$h\,\{\cos^3 h + \cos^3 2h + \cos^3 3h \ldots\ldots + \cos^3 (n-1)\,h\},$$

in cui $nh = \pi$. Ora

$$\cos^3 h = -\cos^3 (n-1)\,h, \quad \cos^3 2h = -\cos^3 (n-2)\,h \ldots\ldots;$$

così i termini positivi della serie eguagliano i termini negativi e lasciano zero per risultato.

Nello stesso modo la verità di $\int_0^{\pi} \text{sen}^3\theta \, d\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{sen}^3\,\theta d\theta$ segue *immediatamente* dalla definizione dell'integrazione, e dal fatto che il seno di un angolo è eguale al seno del suo supplemento.

43. Si supponga b maggiore di a e $\varphi(x)$ sempre positiva tra i limiti a e b di x; allora ogni termine nella serie $\Sigma\varphi(x)\,\Delta x$ è positivo, e quindi il limite $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *deve essere una quantità positiva.*

44. Tutto ciò che si è stabilito suppone che la funzione da integrarsi sia sempre finita tra i limiti dell'integrazione; poichè bisogna rammentarsi che questa condizione fu introdotta espressamente nella proposizione fondamentale, Art. 2. Se quindi la funzione da integrarsi diviene infinita tra i limiti dell'integrazione, le regole dell'integrazione non possono applicarsi; al meno il caso deve essere specialmente esaminato.

45. Si consideri $\int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$; il valore di questo integrale è $2 - 2\sqrt{(1-a)}$. Quì la funzione da integrarsi diviene infinita quando $x = 1$; ma l'espressione $2 - 2\sqrt{(1-a)}$ è finita quando $a = 1$. Quindi in questo caso possiamo scrivere

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = 2$, purchè riguardiamo ciò come un'abbreviazione della seguente proposizione: « $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$ è sempre finito se a è una quantità minore dell'unità, e prendendo a sufficientemente prossima all'unità, possiamo far differire il valore dell'integrale tanto poco quanto ci piace da 2. »

46. Consideriamo ora $\int_0^a \frac{dx}{1-x}$; il valore di questo integrale è $-\log(1-a)$, il quale cresce indefinitamente quando a si avvicina all'unità. Quindi in questo caso possiamo scrivere $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \infty$ purchè riguardiamo ciò come un'abbreviazione della seguente proposizione: « $\int_0^a \frac{dx}{1-x}$ cresce indefinitamente a misura che a si avvicina all'unità, e prendendo a sufficientemente prossima all'unità possiamo rendere l'integrale maggiore di ogni quantità assegnata. »

47. In fine consideriamo $\int \frac{dx}{(1-x)^2}$; qui l'integrale è $\frac{1}{1-x}$. Se senza osservare che la funzione da integrarsi diviene infinita quando $x=1$, proponiamo di trovare il valore dell'integrale tra i limiti 0 e 2, otteniamo $-1-1$, cioè -2. Ma ciò è falso evidentemente, poichè in questo caso ogni termine della serie indicata da $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ è positivo, e quindi il limite non può essere negativo. In fatti $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ ed $\int_1^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$ sono entrambi infiniti. Quest'esempio mostra che le regole ordinarie per integrare tra limiti assegnati non possono essere adoperate quando la funzione da integrarsi diviene infinita tra questi limiti.

48. Nella investigazione fondamentale nell'Art. 2, del valore di $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, i limiti a e b sono supposti *finiti* al pari della funzione $\varphi(x)$. Ma spesso troveremo conveniente di supporre uno o ambedue i limiti *infiniti*, come indicheremo ora con esempii.

Si consideri $\int \frac{dx}{1+x^2}$; l'integrale è $\tan^{-1} x$. Quindi $\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} a$; quanto più grande diviene a, tanto maggiormente $\tan^{-1} a$ si avvicina a $\frac{\pi}{2}$, e prendendo a sufficientemente grande, possiamo far differire $\tan^{-1} a$ tanto poco quanto ci piace da $\frac{\pi}{2}$; quindi possiamo scrivere $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ come un abbreviazione di questa proposizione.

Similmente $\int_0^a \frac{dx}{1+x} = \log(1+a)$; e prendendo a sufficientemente grande possiamo rendere $\log(1+a)$ maggiore di ogni quantità assegnata. Quindi per abbreviazione possiamo scrivere

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \infty .$$

49. Supponiamo la funzione $\varphi(x)$ diventare infinita *una sola volta* tra i limiti a e b, propriamente, quando $x = c$. Allora non possiamo applicare le regole ordinarie dell'integrazione ad $\int_a^b \varphi(x)\,dx$; ma possiamo applicare queste regole ad

$$\int_a^{c-\mu} \varphi(x)\,dx + \int_{c+\mu}^b \varphi(x)\,dx$$

per ogni valore assegnato a μ comunque piccolo. Il limite dell'ultima espressione quando μ diminuisce indefinitamente è detto da Cauchy il valore *principale* dell'integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Per esempio, sia $\varphi(x) = \frac{1}{c-x}$;

allora $$\int_a^{c-\mu} \frac{dx}{c-x} = \log \frac{c-a}{\mu},$$

ed $$\int_{c+\mu}^b \frac{dx}{c-x} = -\int_{c+\mu}^b \frac{dx}{x-c} = -\log \frac{b-c}{\mu};$$

quindi il valore *principale* è $\log\frac{c-a}{\mu} - \log\frac{b-c}{\mu}$, o sia $\log\frac{c-a}{b-c}$.

50. Il valore di $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ è $\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}$; quindi

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \text{sen}^{-1}(1) - \text{sen}^{-1}(-1).$$

Gli studenti sono spesso in dubbio riguardo al valore che deve assegnarsi a $\text{sen}^{-1}(1)$ ed a $\text{sen}^{-1}(-1)$ in un risultato come il precedente. Supponiamo si ponga $x = a\ \text{sen}\,\theta$; così l'integrale diviene $\int d\theta$ o θ. Ora x cresce da $-a$ ad a, quindi i limiti assegnati a θ debbono essere tali da corrispondere a questo andamento dei valori di x. Quando $x = -a$ allora θ può avere un valore qualunque contenuto nella formola $(4n-1)\frac{\pi}{2}$, in cui n è un intero qualunque. Supponiamo che si prenda il valore $(4n-1)\frac{\pi}{2}$, in cui n è un determinato numero intero, allora corrispondente al valore $x = a$ *dobbiamo* prendere $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2} + \pi$; ciò si renderà chiaro osservando che x deve variare da $-a$ a $+a$, in modo da *crescere continuamente e passare solamente una volta per il valore zero.*

Quindi $$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \pi.$$

Siccome questo punto presenta spesso difficoltà ai principianti considereremo un altro esempio.

Supponiamo si cerchi $\int_0^{\pi}\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{a^2+\tan^2\theta}$.

Abbiamo $\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{a^2+\tan^2\theta} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$;

e siccome l'integrale deve essere preso tra i limiti 0 e π,

dobbiamo determinare i valori di $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$ in questi casi. Si supponga $0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n, \pi$, essere una serie di quantità in ordine di grandezza. Per la natura dell'integrazione

$$\int_0^\pi u\,d\theta = \int_0^{\theta_1} u\,d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} u\,d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_3} u\,d\theta + \ldots + \int_{\theta_n}^{\pi} u\,d\theta.$$

Ora ciascuno degli integrali a dritta può rendersi tanto piccolo quanto ci piace crescendo n e facendo che due quantità consecutive come θ_r e θ_{r+1} differiscano tra loro tanto poco quanto ci piace. Quindi vediamo che il simbolo $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$ deve essere preso in modo che $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta_{r+1}}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta_r}{a}\right)$ diminuisca indefinitamente al pari di $\theta_{r+1} - \theta_r$.

Adunque $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$ deve crescere continuamente con θ, e può passare solamente una volta per un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$ mentre θ passa da 0 a π. Quindi se prendiamo $m\pi$ per il valore di $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$ quando $\theta = 0$, dobbiamo prendere $(m+1)\pi$ per il valore quando $\theta = \pi$; e così il valore dell'integrale tra i limiti assegnati è $\frac{\pi}{a}$.

Un errore comune ai principianti si è di prendere il secondo valore eguale al primo, invece di fare che il secondo valore superi il primo di π; così il valore dell'integrale proposto si rende zero, il che contraddice all'Art. 43.

Inoltre, supponiamo si richieda $\int_0^\pi \frac{(a - c\cos\theta)\,d\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta}$.

$$\int \frac{(a - c\cos\theta)\,d\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta} = \frac{1}{2a}\int \left\{ 1 + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta} \right\} d\theta.$$

Così l'integrale richiesto è $\frac{\pi}{2a} + \frac{a^2 - c^2}{2a}\int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta}$.

Ora $\int \frac{d\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta}$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{1}{2}\theta \, d\theta}{(a-c)^2 + (a+c)^2 \tan^2 \frac{1}{2}\theta} = \frac{2}{a^2 - c^2} \tan^{-1}\left(\frac{a+c}{a-c} \tan \tfrac{1}{2}\theta\right).$$

Quando questo risultato si prende tra i limiti assegnati si ha $\frac{2}{a^2 - c^2}\frac{\pi}{2}$ se a è maggiore di c, e $-\frac{2}{a^2 - c^2}\frac{\pi}{2}$ se a è minore di c.

Quindi il valore dell'integrale proposto è $\frac{\pi}{a}$ se a è maggiore di c, e zero se a è minore di c.

51. Sia richiesto $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \operatorname{sen} x \, dx$.

Per l'equazione (3) dell'Art. 41,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \cos x \, dx.$$

Quindi, ponendo y per il richiesto integrale,

$$2y = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\log \operatorname{sen} x + \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log (\operatorname{sen} x \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{ \log \operatorname{sen} 2x - \log 2 \}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \operatorname{sen} 2x \, dx - \frac{1}{2}\pi \log 2.$$

Ma ponendo $2x = x'$, abbiamo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x' \, dx'$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \operatorname{sen} x \, dx,$$ per l'equazione (4) dell'Art. 41;

quindi $$2y = y - \frac{\pi}{2}\log 2,$$

onde $$y = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}.$$

Inoltre, $\int_0^\pi \theta^2 \log \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_0^\pi (\pi-\theta)^2 \log \operatorname{sen}\theta\, d\theta$, per l'equazione (3) dell'Art. 41; quindi

$$0 = \int_0^\pi (\pi^2 - 2\pi\theta) \log \operatorname{sen}\theta\, d\theta,$$

onde $$\int_0^\pi \theta \log \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \log \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\pi^2}{2}\log\frac{1}{2}.$$

Sia richiesto $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$. Si ponga $x = \tan y$, e l'integrale diviene $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan y)\, dy$; ma per l'equazione (3) dell'Art. 41

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan y)\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right\} dy,$$

ed $$1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = 1 + \frac{1-\tan y}{1+\tan y} = \frac{2}{1+\tan y};$$

quindi $$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan y)\, dy = \frac{\pi}{4}\log 2;$$

onde $$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

Si vegga *Cambridge Mathematical Journal*, Vol. III. p. 168.

52. Il *resto* dopo $n+1$ termini dello sviluppo di $\varphi(a+h)$ secondo le potenze di h, si può esprimere con un integrale definito. Infatti sia

$$F(z) = \varphi(x-z) + z\varphi'(x-z) + \frac{z^2}{\underline{|2}}\varphi''(x-z) \ldots + \frac{z^n}{\underline{|n}}\varphi^n(x-z).$$

Si differenzii rispetto a z, allora

$$F'(z) = -\frac{z^n}{\underline{|n}}\varphi^{n+1}(x-z).$$

S'integrino i due membri di questa equazione tra i limiti 0 ed h; così

$$F(h) - F(0) = -\frac{1}{\underline{|n}}\int_0^h z^n \varphi^{n+1}(x-z)\,dz,$$

cioè,

$$\varphi(x-h) + h\varphi'(x-h) + \frac{h^2}{\underline{|2}}\varphi''(x-h)\ldots + \frac{h^n}{\underline{|n}}\varphi^n(x-h) - \varphi(x)$$

$$= -\frac{1}{\underline{|n}}\int_0^h z^n \varphi^{n+1}(x-z)\,dz.$$

Ponendo $a+h$ invece di x e trasponendo, verrà

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{\underline{|2}}\varphi''(a)\ldots + \frac{h^n}{\underline{|n}}\varphi^n(a)$$

$$+\frac{1}{\underline{|n}}\int_0^h z^n \varphi^{n+1}(a+h-z)\,dz.$$

Così l'eccesso di $\varphi(a+h)$ sulla somma dei primi $n+1$ termini del suo sviluppo col Teorema di Taylor è espresso dall'integrale definito

$$\frac{1}{\underline{|n}}\int_0^h z^n \varphi^{n+1}(a+h-z)\,dz.$$

Per mezzo del primo risultato nell'Art. 40, possiamo porre per questo integrale definito

$$\frac{\theta^n h^{n+1}}{\underline{|n}}\varphi^{n+1}(a+h-\theta h),$$

in cui θ è una frazione propria.

Per mezzo del secondo risultato nell'Art. 40, possiamo porre per questo integrale definito

$$\frac{1}{\underline{|n}}\varphi^{n+1}(a+h-\theta h)\int_0^h z^n\,dz,$$

o
$$\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}\varphi^{n+1}(a+\theta_1 h),$$
in cui θ_1 è anche una frazione propria.

53. *Serie di Bernoulli.* Con l'integrazione per parti abbiamo

$$\int \varphi(x)\,dx = x\,\varphi(x) - \int x\,\varphi'(x)\,dx,$$

$$\int x\,\varphi'(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\varphi'(x) - \int \frac{x^2}{2}\varphi''(x)\,dx,$$

$$\int x^2\varphi''(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\varphi''(x) - \int \frac{x^3}{3}\varphi'''(x)\,dx.$$

....

Così
$$\int \varphi(x)\,dx = x\,\varphi(x) - \frac{x^2}{1\cdot 2}\varphi'(x) + \frac{x^3}{\lfloor 3}\varphi''(x)\ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{\lfloor n}\varphi^{n-1}(x) + \frac{(-1)^n}{\lfloor n}\int x^n\varphi^n(x)\,dx.$$

Quindi,
$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = a\,\varphi(a) - \frac{a^2}{1\cdot 2}\varphi'(a) + \frac{a^3}{\lfloor 3}\varphi''(a)\ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}a^n\varphi^{n-1}(a)}{\lfloor n} + \frac{(-1)^n}{\lfloor n}\int_0^a x^n\varphi^n(x)\,dx.$$

Questa serie a dritta è chiamata la serie di Bernoulli. In alcuni casi questo procedimento può essere utile per ottenere $\int_0^a \varphi(x)\,dx$; per esempio, se $\varphi(x)$ è una funzione algebrica razionale dell' $(n-1)^{mo}$ grado, $\varphi^n(x)$ è zero; o può accadere che $\int x^n\varphi^n(x)\,dx$ sia più facile a trovarsi di $\int \varphi(x)\,dx$. O ancora, si può richiedere solamente un valore *approssimato* di $\int_0^a \varphi(x)\,dx$ e l'integrale $\int_0^a x^n\varphi^n(x)\,dx$ potrebbe essere sufficientemente piccolo da potersi trascurare.

54. Adottando diversi metodi per integrare una funzione possiamo alle volte giungere a risultati apparentemente diversi. Ma sappiamo (*Calc. Dif.* Art. 102) che due funzioni le quali hanno lo stesso coefficiente differenziale possono differire solamente per una costante, sicchè i due risultati che otteniamo debbono o essere identici o differire per una costante. Si prenda per esempio

$$\int (ax+b)(a'x+b')\,dx\,;$$

s'integri per parti, così otteniamo

$$\frac{(ax+b)^2}{2a}(a'x+b') - \int \frac{a'}{2a}(ax+b)^2\,dx\,,$$

cioè
$$\frac{(ax+b)^2(a'x+b')}{2a} - \frac{a'(ax+b)^3}{6a^2}.$$

Se integriamo per parti in altro modo, possiamo ottenere

$$\frac{(a'x+b')^2(ax+b)}{2a'} - \frac{a(a'x+b')^3}{6a'^2}.$$

Quindi
$$\frac{(ax+b)^2\{3a(a'x+b') - a'(ax+b)\}}{6a^2}$$

ed
$$\frac{(a'x+b')^2\{3a'(ax+b) - a(a'x+b')\}}{6a'^2}$$

possono differire solamente per una costante. Quindi moltiplicando per $6a^2a'^2$ abbiamo

$$a'^2(ax+b)^2\{3a(a'x+b') - a'(ax+b)\}$$
$$- a^2(a'x+b')^2\{3a'(ax+b) - a(a'x+b')\} = C,$$

in cui C è una costante. Ciò può verificarsi con la comune riduzione. Possiamo facilmente determinare il valore di C; infatti siccome esso è indipendente da x possiamo supporre $ax+b=0$, onde, $x = -\frac{b}{a}$; allora il primo membro diviene $(ab'-ba')^3$, che è per conseguenza il valore di C.

Similmente da

$$\int (ax + b)\, dx + \int (a'x + b')\, dx = \int \{ (a + a')\, x + b + b' \}\, dx$$

deduciamo

$$\frac{(ax+b)^2}{2a} + \frac{(a'x+b')^2}{2a'} = \frac{\{(a+a')\,x+b+b'\}^2}{2(a+a')} + \text{costante.}$$

Si moltiplichi per $2aa'(a + a')$ e poi si determini la costante supponendo $x = 0$; così otteniamo l'identità

$$a'(a+a')(ax+b)^2 + a(a+a')(a'x+b')^2$$
$$= aa'\{(a+a')\,x+b+b'\}^2 + (ba'-ab')^2.$$

55. Con $\int \varphi(x)\, dx$ noi indichiamo la funzione di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale; si supponga questa essere $\psi(x)$. Allora possiamo richiedere la funzione di cui $\psi(x)$ è il coefficiente differenziale, la quale dinotiamo con $\int \psi(x)\, dx$, o con $\iint \varphi(x)\, dx\, dx$, e così di seguito. Per esempio, l'integrale di e^{kx} è $\frac{1}{k} e^{kx} + C_1$, in cui C_1 è una costante; l'integrale di questo è

$$\frac{1}{k^2} e^{kx} + C_1 x + C_2\,;$$

l'integrale di questo è

$$\frac{1}{k^3} e^{kx} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

in cui $\frac{C_1}{2}$ essendo ancora una costante può dinotarsi per semplicità con B se ci piace. Procedendo così troveremmo per risultato dell'integrare e^{kx} successivamente n volte

$$\frac{e^{kx}}{k^n} + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\, x + A_n,$$

in cui $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono costanti.

È facile di esprimere un integrale ripetuto per mezzo di integrali semplici. Infatti sia u una funzione di x; sia

$$u_1 = \int u dx \text{; sia } u_2 = \int u_1 dx \text{; sia } u_3 = \int u_2 dx \text{;}$$

e così di seguito.

Integrando per parti abbiamo

$$u_2 = \int u_1 dx = x u_1 - \int x \frac{du_1}{dx} dx = x \int u dx - \int x u dx;$$

$$u_3 = \int u_2 dx = \int \left\{ x \int u dx - \int x u dx \right\} dx;$$

quindi integrando per parti,

$$u_3 = \frac{x^2}{2} \int u dx - \int \frac{x^2}{2} u dx - x \int x u dx + \int x^2 u dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \int u dx - x \int x u dx + \frac{1}{2} \int x^2 u dx.$$

La formola generale è

$$\lfloor n \; u_{n+1} = x^n \int u dx - n x^{n-1} \int x u dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \int x^2 u dx - \dots$$

$$\dots\dots + (-1)^r \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\lfloor r} x^{n-r} \int x^r u dx + \dots$$

$$\dots\dots + (-1)^n \int x^n u dx.$$

La verità di questa formola può stabilirsi facilmente per induzione; infatti se differenziamo i due membri otteniamo una formola simile con $n-1$ in luogo di n.

ESEMPII DIVERSI.

1. $\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{5\pi a^3}{16}$. (Si ponga $x = a\,\text{sen}^2\theta$.)

2. $\int_0^{2a} \frac{x dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \pi a$.

3. $\int_0^a \frac{(a^2 - e^2x^2)\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{\pi a^2}{2}\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$.

4. $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$.

5. Se $\varphi(x) = \varphi(a + x)$, mostrare che

$$\int_0^{na} \varphi(x)\,dx = n\int_0^a \varphi(x)\,dx.$$

6. Mostrare che $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{2c}\int_{-c}^{c} \varphi\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2c}x\right)dx$.

7. Mostrare che $\int_0^\pi \frac{x\,\text{sen}\,x\,dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$. (Si muti x in $\pi - x'$).

8. Mostrare che $\int_0^{2a} (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}\,\text{vers}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{3\pi^2 a^4}{16}$.

(Si muti x in $2a - x'$).

9. Trovare il limite quando n è infinito di

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{(n^2 - 1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n^2 - 2^2)}} + \dots\dots + \frac{1}{\sqrt{\{n^2 - (n-1)^2\}}}.$$

Risultato. $\frac{\pi}{2}$.

10. Trovare il limite quando n è infinito di

$$\frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^p + \left(\frac{2}{2n}\right)^p + \left(\frac{3}{2n}\right)^p + \ldots \text{a } 2n \text{ termini}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^p + \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2n}\right)^p + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2n}\right)^p + \ldots \text{ad } n \text{ termini}}.$$

Risultato. $\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}$.

11. Trovare il limite quando n è infinito di $\left\{\dfrac{\lfloor n}{n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$.

Risultato. $\dfrac{1}{e}$. (Si prenda il logaritmo dell'espressione.)

12. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x \, dx = 0$.

13. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} x \, dx = \log 2 - 1$.

14. Se $f(x)$ è positiva e finita da $x = a$ ad $x = a + c$, mostrare come si possa trovare il limite di

$$\left\{f(a) f\left(a + \frac{c}{n}\right) \ldots \ldots f\left(a + \frac{n-1}{n} c\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

quando n è infinito; e dimostrare che il limite in questione è minore di $\dfrac{1}{c}\int_a^{a+c} f(x)\, dx$, ammettendo che la media geometrica di un numero finito di quantità positive che non sono tutte eguali è minore della media aritmetica.

Quindi dimostrare che $e^{\int_0^1 u dx}$ è minore di $\int_0^1 e^u \, dx$, a meno che u sia costante da $x = 0$ ad $x = 1$.

15. Il valore dell'integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+n\cos^2\theta)\,d\theta$ può trovarsi per qualunque valore positivo dato ad n per mezzo, della formola

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+n\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{4}\log\{(1+n)(1+n_1)^{\frac{1}{2}}(1+n_2)^{\frac{1}{4}}\ldots\}$$

in cui $n, n_1, n_2, \ldots\ldots$ sono quantità legate dall'equazione

$$n_{r+1} = \frac{n_r^2}{4(n_r+1)}.$$

16. Mostrare che

$$\int e^{cx}\cos ax\,dx = \frac{e^{cx}\cos(ax-\varphi)}{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} + \text{una costante},$$

in cui $\tan\varphi = \frac{a}{c}$. Quindi mostrare che se $e^{cx}\cos ax$ s'integra n volte successivamente il risultato è

$$\frac{e^{cx}\cos(ax-n\varphi)}{(a^2+c^2)^{\frac{n}{2}}} + C + C_1x + C_2x^2\ldots\ldots + C_{n-1}x^{n-1}.$$

CAPITOLO V.

DOPPIA INTEGRAZIONE.

56. Dinoti $\varphi(x)$ una funzione di x; allora abbiamo veduto che l'*integrale* di $\varphi(x)$ è una quantità u tale che $\frac{du}{dx} = \varphi(x)$. L'integrale si può anche riguardare come il limite di una certa somma (si veggano gli Art. 2 – 6), e da ciò è derivato il simbolo $\int \varphi(x)\,dx$ col quale si dinota l'integrale. Procediamo ora ad estendere questi concetti dell'integrale ai casi in cui si hanno più variabili indipendenti.

57. Supponiamo che si debba trovare il valore di u che soddisfi all'equazione $\frac{d^2u}{dy\,dx} = \varphi(x, y)$, in cui $\varphi(x, y)$ è una funzione delle variabili indipendenti x ed y. L'equazione può essere scritta

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = \varphi(x, y),$$

o

$$\frac{dv}{dy} = \varphi(x, y),$$

se $v = \frac{du}{dx}$. Così v deve essere una funzione tale che se la differenziamo rispetto ad y, considerando x come costante, il risultato sarà $\varphi(x, y)$. Possiamo porre perciò

$$v = \int \varphi(x, y)\,dy,$$

o sia

$$\frac{du}{dx} = \int \varphi(x, y)\,dy.$$

Quindi u deve essere una funzione tale che se la differenziamo rispetto ad x, considerando y costante, il risultato sarà la funzione dinotata da $\int \varphi(x, y)\, dy$. Adunque

$$u = \int \left\{ \int \varphi(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Il metodo per trovare u si può descrivere dicendo che prima s'integra $\varphi(x, y)$ rispetto ad y, e poi s'integra il risultato rispetto ad x.

La precedente espressione di u si può scrivere più concisamente così,

$$\iint \varphi(x, y)\, dy\, dx, \quad \text{o} \quad \iint \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Su questo punto della notazione gli scrittori non sono del tutto uniformi; in questa opera adotteremo l'ultima forma, cioè, dei due simboli dx e dy porremo dy a dritta, allorchè consideriamo l'integrazione rispetto ad y eseguita prima dell'integrazione rispetto ad x, e *viceversa*.

58. Potremmo trovare u integrando prima rispetto ad x e poi rispetto ad y; questo procedimento sarebbe indicato dall'equazione

$$u = \iint \varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

59. Poichè abbiamo *due metodi* per trovare u dall'equazione $\frac{d^2u}{dx\, dy} = \varphi(x, y)$, sarà desiderabile di investigare se si può ottenere più di *un risultato*. Supponiamo adunque che u_1 ed u_2 siano due funzioni ciascuna delle quali quando si pone per u soddisfi alla data equazione, sicchè

$$\frac{d^2u_1}{dx\, dy} = \varphi(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{d^2u_2}{dx\, dy} = \varphi(x, y).$$

Abbiamo, con la sottrazione,

$$\frac{d^2u_1}{dx\, dy} - \frac{d^2u_2}{dx\, dy} = 0,$$

o sia $\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$, in cui $v = u_1 - u_2$.

Ora da un'equaziono $\frac{dw}{dx} = 0$ deduciamo che w deve essere una *costante*, cioè, deve essere una *costante* in quanto si riferisce ad x; in altri termini, w non può essere una funzione di x, ma *può* essere una funzione di ogni altra variabile che occorre nella questione che si considera.

Così dall'equazione $\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$ deduciamo che $\frac{dv}{dy}$ non può essere una funzione di x, ma *può* essere una funzione arbitraria di y. Sicchè possiamo porre

$$\frac{dv}{dy} = f(y).$$

Integrando deduciamo

$$v = \int f(y)\, dy + \text{costante}.$$

Quì la costante, come la chiamiamo, non deve contenere y, ma può contenere x; la possiamo dinotare con $\chi(x)$. Ed $\int f(y)\, dy$ lo dinoteremo con $\psi(y)$; così finalmente

$$v = \psi(y) + \chi(x).$$

Adunque due valori di u che sodisfanno all'equazione $\frac{d^2u}{dx\,dy} = \varphi(x, y)$ possono differire solamente per la somma di due funzioni arbitrarie, l'una della sola x e l'altra della sola y.

60. Mostreremo ora il legame tra la doppia integrazione e la sommazione. Sia $\varphi(x, y)$ una funzione di x ed y, che rimane finita e continua finchè x è compreso tra i valori fissi a e b, ed y tra i valori fissi α e β. Sia $a, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}, b$ una serie di quantità in ordine di grandezza; del pari sia $\alpha, y_1, y_2, \ldots\ldots y_{m-1}, \beta$ un'altra serie di quantità in ordine di grandezza.

Sia $x_1 - a = h_1, x_2 - x_1 = h_2, \ldots\ldots\ldots b - x_{n-1} = h_n$;

similmente sia

$$y_1 - \alpha = k_1, y_2 - y_1 = k_2, \ldots\ldots\ldots \beta - y_{m-1} = k_m.$$

Proponiamoci ora di trovare il limite della somma di una certa serie in cui ogni termine è della forma

$$h_r k_s \varphi(x_{r-1}, y_{s-1}),$$

in cui r prende tutt'i valori interi tra 1 ed n inclusivamente, ed s prende tutt'i valori interi tra 1 ed m inclusivamente; ed ultimamente m ed n debbono supporsi infiniti; ancora x_0 ed y_0 debbono considerarsi equivalenti ad a ed α rispettivamente. Così possiamo prendere $hk\varphi(x, y)$ come tipo dei termini di cui vogliamo la somma, o pure possiamo prendere $\Delta x \Delta y \varphi(x, y)$ come un simbolo anche più espressivo. La serie è allora

$$h_1\{k_1\varphi(a, \alpha) + k_2\varphi(a, y_1) + k_3\varphi(a, y_2) \ldots\ldots + k_m\varphi(a, y_{m-1})\}$$

$$+ h_2\{k_1\varphi(x_1, \alpha) + k_2\varphi(x_1, y_1) + k_3\varphi(x_1, y_2) \ldots\ldots + k_m\varphi(x_1, y_{m-1})\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ h_n\{k_1\varphi(x_{n-1}, \alpha) + k_2\varphi(x_{n-1}, y_1) + \ldots\ldots\ldots + k_m\varphi(x_{n-1}, y_{m-1})\}.$$

Consideriamo una delle linee orizzontali di termini che possiamo scrivere

$$h_{r+1}\{k_1\varphi(x_r, \alpha) + k_2\varphi(x_r, y_1) + k_3\varphi(x_r, y_2) \ldots\ldots + k_m\varphi(x_r, y_{m-1})\}.$$

Il limite della serie in parentesi quando $k_1, k_2, \ldots k_m$ diminuiscono indefinitamente è, per l'Art. 3,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x_r, y)\, dy.$$

Poichè questo è il limite della serie, possiamo supporre la serie stessa eguale ad

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x_r, y)\, dy + \rho_{r+1},$$

in cui ρ_{r+1} ultimamente svanisce.

Si dinoti $\int_\alpha^\beta \varphi(x_r, y)\, dy$ con $\psi(x_r)$; allora sommando tutte le linee orizzontali otteniamo un risultato che possiamo dinotare con

$$\Sigma h\, \psi(x) + \Sigma h\rho.$$

Ora si diminuisca indefinitamente ciascun termine di cui h è il tipo, allora $\Sigma h \rho$ svanisce, ed abbiamo finalmente

$$\int_a^b \psi(x)\,dx\,;$$

cioè,

$$\int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dy \right\} dx.$$

Questo si scrive più concisamente

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dx\,dy\,.$$

dy essendo posto a dritta di dx perchè l'integrazione si esegue prima rispetto ad y.

61. Possiamo di nuovo rammentare allo studente che gli scrittori non sono tutti d'accordo riguardo alla notazione degl'integrali doppii. Così noi usiamo $\int_a^b \int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\,dx\,dy$ per indicare il seguente ordine di operazioni: s'integra $\varphi(x,y)$ rispetto ad y tra i limiti α e β; indi s'integra il risultato rispetto ad x tra i limiti a e b. Alcuni scrittori dinoterebbero lo stesso ordine di operazioni con $\int_a^b \int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dy\,dx$.

62. Avremmo potuto ottenere il limite della somma nell'Art. 60 prendendo prima tutt' i termini in una colonna, e poi prendendo tutte le colonne. In questo modo otterremmo per la somma $\int_\alpha^\beta \int_a^b \varphi(x, y)\,dy\,dx$; per conseguenza

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b \varphi(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

63. Sinora abbiamo integrato tanto rispetto ad x quanto rispetto ad y tra limiti costanti; nelle applicazioni della doppia integrazione, però, i limiti nella prima integrazione sono spesso funzioni dell'altra variabile. Così, per esempio,

il simbolo $\int_a^b \int_{\chi(x)}^{\psi(x)} \varphi(x, y)\, dx\, dy$ dinoterà le seguenti operazioni: prima s'integra rispetto ad y considerando x costante; si supponga essere $F(x, y)$ l'integrale; indi prendendo l'integrale tra i limiti assegnati abbiamo il risultato

$$F\{x, \psi(x)\} - F\{x, \chi(x)\}.$$

Finalmente dobbiamo ottenere l'integrale indicato da

$$\int_a^b [F\{x, \psi(x)\} - F\{x, \chi(x)\}]\, dx.$$

La sola differenza che si richiede nel procedimento sommatorio dell'Art. 60 si è, che le quantità $\alpha, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ non avranno lo stesso significato in ciascuna linea orizzontale. Nella $(r+1)^{ma}$ linea, per esempio, cioè, in

$$h_{r+1}\{k_1\varphi(x_r, \alpha) + k_2\varphi(x_r, y_1) + k_3\varphi(x_r, y_2) \ldots + k_m\varphi(x_r, y_{m-1})\},$$

dobbiamo considerare α come messa per $\chi(x_r)$, ed $y_1, y_2, \ldots$ come una serie di quantità, tale che $\chi(x_r), y_1, y_2, \ldots\ldots y_{m-1}, \psi(x_r)$, sono in ordine di grandezza, e che la differenza tra due consecutive qualunque ultimamente svanisce. Quindi, procedendo come sopra, otteniamo $\int_{\chi(x_r)}^{\psi(x_r)} \varphi(x_r, y)\, dy$ per il limite della somma dei termini nella $(r+1)^{ma}$ linea.

64. Non è necessario di supporre lo stesso numero di termini in tutte le linee orizzontali; poichè m ultimamente diviene infinitamente grande, sicchè otteniamo la stessa espressione per il limite della $(r+1)^{ma}$ linea qualunque possa essere il numero dei termini dal quale partiamo.

65. Quando i limiti nella prima integrazione sono funzioni dell'altra variabile non possiamo eseguire le integrazioni in ordine diverso, come nell'Art. 62, senza una speciale investigazione per determinare quali saranno allora i limiti. Questa quistione sarà considerata in uno dei capitoli seguenti.

66. Dalla definizione della doppia integrazione, segue che quando i limiti delle due integrazioni sono costanti,

$$\iint \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy = \int \varphi(x)\, dx \times \int \psi(y)\, dy,$$

supponendo che i limiti in $\int \psi(y)\,dy$ sono gli stessi che nell'integrazione rispetto ad y nel primo membro, ed i limiti in $\int \varphi(x)\,dx$ gli stessi che nell'integrazione rispetto ad x nel primo membro. Infatti il primo membro è il limite della somma di una serie di termini, tali che

$$h_r k_s \varphi(x_{r-1})\,\psi(y_{s-1}),$$

ed il secondo membro è il limite del prodotto di

$$h_1\varphi(x_0) + h_2\varphi(x_1) + h_3\varphi(x_2) \ldots\ldots + h_n\varphi(x_{n-1}),$$

per $\quad k_1\psi(y_0) + k_2\psi(y_1) + k_3\psi(y_2) \ldots\ldots + k_m\psi(y_{m-1}).$

67. Il lettore sarà ora capace di estendere i procedimenti dati in questo capitolo agl'integrali *tripli* ed agl'integrali *multipli* in generale. Il simbolo

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

indicherà che deve essere eseguita la seguente serie di operazioni: integrare $\varphi(x, y, z)$ rispetto a z tra i limiti ζ_0 e ζ_1 considerando x ed y costanti; indi integrare il risultato rispetto ad y tra i limiti η_0 ed η_1 considerando x costante; finalmente integrare questo risultato rispetto ad x tra i limiti ξ_0 e ξ_1. Quì ζ_0 e ζ_1 possono essere funzioni di x ed y; ed η_0 ed η_1 possono essere funzioni di x. Questo integrale triplo è il limite di una certa serie che può essere dinotata da $\Sigma\varphi(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$.

ESEMPII DIVERSI.

Ottenere gli otto integrali seguenti.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a^3 - x^3)}}\,dx.$ (Si ponga $y = x^{\frac{3}{2}}$.)

Risultato. $\frac{2}{3}\,\text{sen}^{-1}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$.

2. $\int \frac{x^3 dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

Risultato. $x + \frac{a^3 \log(x-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3 \log(x-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3 \log(x-c)}{(c-a)(c-b)}$.

3. $\int \frac{\tan x \, dx}{1 + m^2 \tan^2 x}$. *Risultato.* $\frac{\log(\cos^2 x + m^2 \operatorname{sen}^2 x)}{2(m^2-1)}$.

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^{2n} + x^{2n})}}$. $\left(\text{Si ponga } x = \frac{1}{y}\right)$.

Risultato. $\frac{1}{na^n} \log \frac{x^n}{a^n + \sqrt{(a^{2n} + x^{2n})}}$.

5. $\int \sec x \sec 2x \, dx$.

Risultato. $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{sen} x} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

6. $\int \frac{\tan a - \tan x}{\tan a + \tan x} dx$.

Risultato. $\operatorname{sen} 2a \log \operatorname{sen}(a+x) - x \cos 2a$.

7. $\int \frac{dx}{x^4 + a^2x^2 + a^4}$.

Risultato. $\frac{1}{4a^3} \log \frac{x^2 + ax + a^2}{x^2 - ax + a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{xa\sqrt{3}}{a^2 - x^2}$.

8. $\int \frac{(a - bx^2)\, dx}{x\sqrt{\{cx^2 - (a - bx^2)^2\}}}$. (Si ponga $\frac{a}{x} + bx = y$.)

Risultato. $\cos^{-1} \frac{y}{\sqrt{(c + 4ab)}}$.

9. Trovare il limite quando n è infinito di

$\left\{ \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} \ldots\ldots \operatorname{sen}\frac{n\pi - \pi}{n} \right\}^{\frac{1}{n}}$. *Risultato* $\frac{1}{2}$.

10. Mostrare che

$$\int_0^1 x(\tan^{-1} x)^2\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\log\sqrt{2}.$$

11. Mostrare che

$$\int_0^a\int_0^x\int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz = \frac{e^{4a}}{8}-\frac{3e^{2a}}{4}+e^a-\frac{3}{8}.$$

12. Sia $A=\iint x^2\,dx\,dy$, $B=\iint xy\,dx\,dy$, $C=\iint y^2\,dx\,dy$,

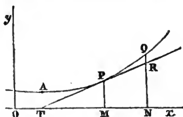
e si suppongano gli stessi limiti delle integrazioni nei tre integrali; allora dimostrare che AC è maggiore di B^2.

CAPITOLO IV.

LUNGHEZZE DELLE CURVE.

Curve piane. Coordinate rettangolari.

68. Sia P un punto qualunque sulla curva APQ, e siano x, y le sue coordinate; dinoti s la lunghezza dell'arco AP misurato da un punto fisso A sino a P;



allora (*Cal. Dif.* Art. 307)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$$

Onde

$$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx.$$

Dall'equazione della curva possiamo esprimere $\frac{dy}{dx}$ in x, e così con l'integrazione si conosce s.

69. Il procedimento per trovare la lunghezza di una curva si chiama la *rettificazione della curva*, poichè possiamo supporre che la quistione sia questa: trovare una *linea retta* eguale in lunghezza ad una porzione assegnata della curva.

Nell'articolo precedente abbiamo mostrato che la lunghezza di un arco di una curva sarà conosciuta se può ottenersi un certo integrale. Può accadere in molti casi che questo integrale non si possa ottenere. Sempre che la lunghezza di un arco di una curva si può esprimere per mezzo di una o di entrambe le coordinate dell'estremità variabile dell'arco, la curva si dice essere *rettificabile*.

70. *Applicazione alla Parabola.*

L'equazione della parabola è $y = \sqrt{(4ax)}$; onde

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{x+a}{a}\right)};$$

così $$s = \int \sqrt{\left(\frac{x+a}{x}\right)} dx \quad \text{(Si vegga Es. 6, p. 19)}$$

$$= \sqrt{(ax + x^2)} + a \log \{ \sqrt{x} + \sqrt{(a+x)} \} + C.$$

Quì C dinota una quantità *costante*, cioè, una quantità che non dipende da x; il suo valore dipenderà dalla posizione del punto fisso dal quale si misura l'arco s. Se misuriamo dal vertice allora s svanisce con x; quindi per determinare C abbiamo

$$a \log \sqrt{a} + C = 0;$$

o così $$s = \sqrt{(ax + x^2)} + a \log \{ \sqrt{x} + \sqrt{(a+x)} \} - a \log \sqrt{a}$$

$$= \sqrt{(ax + x^2)} + a \log \frac{\sqrt{x} + \sqrt{(a+x)}}{\sqrt{a}}.$$

Se dunque richiediamo la lunghezza della curva misurata dal vertice sino al punto che ha un'ascissa assegnata, dobbiamo porre solamente quell'ascissa assegnata in luogo di x nell'ultima espressione. Così, per esempio, per una delle estremità del lato retto $x = a$; quindi la lunghezza dell'arco tra il vertice ed un'estremità del lato retto è

$$a\sqrt{2} + a \log (1 + \sqrt{2}).$$

71. Nell'articolo precedente abbiamo trovato il valore della costante C, ma nell'applicare la formola per trovare le lunghezze di porzioni assegnate delle curve questo non è ne-

cessario. Infatti supponiamo che si voglia trovare la lunghezza dell'arco di una curva misurato dal punto che ha per ascissa x_1 sino al punto di cui l'ascissa è x_2. Dinoti $\psi(x)$ l'integrale di $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$, e siano s_1 ed s_2 le lunghezze degli archi della curva misurati da un punto fisso sino ai punti di cui le ascisse sono x_1 ed x_2 rispettivamente, sicchè $s_2 - s_1$ è la lunghezza richiesta; allora

$$s = \int \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx = \psi(x) + C;$$

onde $$s_1 = \psi(x_1) + C; \quad s_2 = \psi(x_2) + C;$$

quindi $$s_2 - s_1 = \psi(x_2) - \psi(x_1).$$

Quindi per trovare la lunghezza cercata dobbiamo porre successivamente x_1 ed x_2 in luogo di x in $\psi(x)$ e sottrarre il primo risultato dal secondo. Così non abbiamo bisogno di prendere alcuna notizia della costante C; infatti il nostro risultato si può scrivere

$$s_2 - s_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx.$$

72. *Applicazione alla Cicloide.*

Nella cicloide, se l'origine è al vertice e l'asse delle y è la tangente in quel punto, abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 358).

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)};$$

onde $$s = \sqrt{(8ax)} + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco s dal vertice.

Viceversa se $s = \sqrt{(8ax)} + C$ s'inferisce che la curva è una cicloide. E più generalmente se abbiamo

$$s + A = \sqrt{(B + C_1 x + C_2 y)},$$

in cui A, B, C_1, e C_2 sono costanti, s'inferisce che la curva è una cicloide. Infatti per mezzo di convenienti cangiamenti

nell'origine e negli assi all'ultima equazione può darsi la forma

$$s = \sqrt{(8ax)} + C.$$

73. *Applicazione alla Catenaria.*

L'equazione della catenaria è $y = \frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})$; onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}), \qquad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}});$$

così $$s = \frac{1}{2}\int (e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})\, dx = \frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}) + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco s dal punto pel quale $x = 0$.

74. *Applicazione alla Curva data dall'equazione*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Quì $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}, \qquad \frac{ds}{dx} = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}};$$

così $$s = a^{\frac{1}{3}}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{2} + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco dal punto pel quale $x = 0$. La curva è una ipocicloide in cui il raggio del circolo mobile è un quarto del raggio del circolo fisso. $\left(\text{Si vegga } \textit{Cal. Dif.} \text{ Art. 360, e si ponga } b = \frac{a}{4}\right)$.

75. Nello stesso modo col quale si è ottenuto il risultato nell'Art. 68 possiamo mostrare che

$$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}\, dy.$$

O pure possiamo dedurre questo risultato dal primo così;

$$\int \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx = \int \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} \frac{dx}{dy}\, dy$$
$$= \int \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}\, dy.$$

Dall'equazione della curva possiamo esprimere $\frac{dx}{dy}$ in y, e così con l'integrazione si conosce s. In alcuni casi questa formola può essere più conveniente di quella nell'Art. 68.

76. *Applicazione alla Curva Logaritmica.*

L'equazione di questa curva è $y = ba^x$, o $y = be^{\frac{x}{c}}$ se supponiamo $a = e^{\frac{1}{c}}$; così $x = c \log \frac{y}{b}$,

onde $$\frac{dx}{dy} = \frac{c}{y}, \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{(c^2+y^2)}}{y},$$

ed $$s = \int \frac{\sqrt{(c^2+y^2)}}{y} dy = \int \frac{c^2 dy}{y\sqrt{(c^2+y^2)}} + \int \frac{y dy}{\sqrt{(c^2+y^2)}}.$$

L'ultimo integrale è $\sqrt{(c^2+y^2)}$; il primo è

$$c \log \frac{y}{c+\sqrt{(c^2+y^2)}}, \quad \text{(Art. 14)}.$$

Quindi $$s = c \log \frac{y}{c+\sqrt{(c^2+y^2)}} + \sqrt{(c^2+y^2)} + C.$$

77. Se x ed y sono funzioni di una terza variabile t, abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 307)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}};$$

così $$s = \int \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}} dt.$$

78. L'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Possiamo pren-

dere perciò $x = a \operatorname{sen} \varphi$, $y = b \cos \varphi$, sicchè φ è il complemento dell'*angolo eccentrico*. Quindi per l'articolo precedente,

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)},$$

ed $$s = \int \sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}\, d\varphi = a \int \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}\, d\varphi.$$

L'integrale esatto non si può ottenere; possiamo però sviluppare $\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}$ in una serie, sicchè

$$s = a \int \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} e^4 \operatorname{sen}^4 \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \operatorname{sen}^6 \varphi \ldots \right\} d\varphi$$

e ciascun termine si può integrare separatamente. Per ottenere la lunghezza del quadrante ellittico dobbiamo integrare tra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Curve piane. Coordinate polari.

79. Siano r, θ le coordinate polari di un punto qualunque di una curva, ed s la lunghezza dell'arco misurato da un punto fisso sino a questo punto; allora (*Cal. Dif.* Art. 311)

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right\}};$$

onde $$s = \int \sqrt{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right\}}\, d\theta.$$

80. *Applicazione alla Spirale di Archimede.*

In questa curva $r = a\theta$, così $\frac{dr}{d\theta} = a$;

quindi $$s = \int \sqrt{(r^2 + a^2)}\, d\theta = a \int \sqrt{(1 + \theta^2)}\, d\theta$$

$$= \frac{a\theta}{2} \sqrt{(1 + \theta^2)} + \frac{a}{2} \log \{ \theta + \sqrt{(1 + \theta^2)} \} + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco s dal polo, cioè, dal punto ove $\theta = 0$.

81. *Applicazione alla Cardioide.*

L'equazione di questa curva è $r = a(1 + \cos\theta)$; così

$$s = \int \sqrt{\{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\operatorname{sen}^2\theta\}}\, d\theta = a\int \sqrt{(2 + 2\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= 2a\int \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco s dal punto pel quale $\theta = 0$, cioè, dal punto in cui la curva attraversa la linea iniziale.

La lunghezza di quella parte della curva che è compresa tra la linea iniziale ed una linea per il polo ad angoli retti sulla linea iniziale è $4a \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$. La lunghezza del semiperimetro della curva è $4a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, cioè, $4a$.

82. Supponiamo che si richieda la lunghezza dell'intero perimetro della cardioide; potremmo sulle prime supporre che essa sia eguale a $2a\int_0^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$; ma ciò darebbe zero per risultato, il che evidentemente è inammissibile. La ragione di questo si può vedere facilmente, infatti abbiamo mostrato che

$$\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{(2 + 2\cos\theta)},$$

e questo non si deve porre eguale a $2a\cos\frac{\theta}{2}$ ma a $\pm 2a\cos\frac{\theta}{2}$, ed il segno conveniente deve essere determinato in ogni applicazione della formola. Ora per s noi intendiamo una quantità positiva, e possiamo misurare s in modo che essa cresca con θ, e così $\frac{ds}{d\theta}$ è positivo. Quindi quando $\cos\frac{\theta}{2}$ è positivo, prendiamo il segno superiore e poniamo $\frac{ds}{d\theta} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$; quando $\cos\frac{\theta}{2}$ è negativo, prendiamo il segno inferiore e poniamo $\frac{ds}{d\theta} = -2a\cos\frac{\theta}{2}$. Quindi la lunghezza dell'intero pe-

rimetro non è $2a\int_0^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$, ma $2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - 2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$, cioè, $8a$. Questo risultato poteva prevedersi, poichè è chiaro per la simmetria della figura che la lunghezza dell'intero perimetro è il doppio della lunghezza di quella parte che è situata da una parte della linea iniziale, la quale si è mostrato essere $4a$ nell'articolo precedente.

83. Alle volte può essere più conveniente di trovare la lunghezza di una curva per mezzo della formola

$$s = \int \sqrt{\left\{ r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1 \right\}}\, dr,$$

che segue immediatamente da quella nell'Art. 79.

84. *Applicazione alla Spirale Logaritmica.*

L'equazione di questa curva è $r = ba^\theta$, o $r = be^{\frac{\theta}{c}}$ se supponiamo $a = e^{\frac{1}{c}}$; così $\theta = c\log\frac{r}{b}$; onde $\frac{d\theta}{dr} = \frac{c}{r}$ ed

$$s = \int \sqrt{(1+c^2)}\, dr = \sqrt{(1+c^2)}\, r + C.$$

Così la lunghezza della porzione della curva che ha r_1 ed r_2 per raggi vettori dei suoi punti estremi è

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(1+c^2)}\, dr\,, \text{ cioè}, \sqrt{(1+c^2)}\,(r_2 - r_1).$$

L'angolo tra il raggio vettore e la corrispondente tangente in ogni punto di questa curva è costante (*Cal. Dif.* Art. 354); e se quell'angolo si dinota con α abbiamo $c = \tan\alpha$; così $\sqrt{(1+c^2)} = \sec\alpha$; onde $\frac{ds}{dr} = \sec\alpha$, ed $s = r\sec\alpha + C$. Quindi $(r_2 - r_1)\sec\alpha$ è la lunghezza della porzione sopra menzionata.

Formole che racchiudono il raggio vettore e la perpendicolare.

85. Sia φ l'angolo tra il raggio vettore r di un punto qualunque di una curva e la tangente in questo punto; allora $\cos\varphi = \frac{dr}{ds}$ (*Cal. Dif.* Art. 310). Sia p la perpendicolare dal polo sulla stessa tangente; allora

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{p}{r}, \text{ onde } \cos\varphi = \frac{\sqrt{(r^2-p^2)}}{r};$$

così
$$\frac{dr}{ds} = \frac{\sqrt{(r^2-p^2)}}{r};$$

quindi
$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{(r^2-p^2)}}, \quad \text{ed} \quad s = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2-p^2)}}.$$

86. *Applicazione all'Epicicloide.*

Con la notazione e la figura nel *Cal. Dif.* Art. 360, si può mostrare che l'equazione della tangente all'epicicloide in P è

$$y' - y = -\frac{\cos\theta - \cos\frac{a+b}{b}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta}(x'-x),$$

in cui x ed y sono le coordinate di P, ed x' ed y' le coordinate variabili. Quindi si troverà che la perpendicolare p dall'origine sulla tangente in P è data da

$$p = (a+2b)\operatorname{sen}\frac{a\theta}{2b};$$

inoltre
$$r^2 = a^2 + 4b(a+b)\operatorname{sen}^2\frac{a\theta}{2b};$$

così
$$p^2 = \frac{c^2(r^2-a^2)}{c^2-a^2}, \text{ in cui } c = a+2b.$$

Quindi, per l'Art. 85,

$$s = \frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{(c^2-r^2)}} = -\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\sqrt{(c^2-r^2)} + C.$$

In una cuspide $r=a$, ed in un vertice $r=c$; così la lunghezza della porziono della curva tra una cuspide ed il vertice adiacente è

$$\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int_a^c \frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{c^2-a^2}{a}, \quad \text{o sia} \quad \frac{4b(a+b)}{a}.$$

Quindi la lunghezza della porzione tra due cuspidi consecutive è $\frac{8b(a+b)}{a}$.

87. Quì si può fare un' osservazione simile a quella nell'Art. 82. Se applichiamo la formola

$$s=-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\sqrt{(c^2-r^2)}+C$$

a trovare la lunghezza tra due cuspidi consecutive, arriviamo al risultato zero, poichè $r=a$ nei due limiti. La ragione si è di aver usato la formola

$$\frac{ds}{dr}=\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(c^2-r^2)}}$$

mentre la vera formola è

$$\frac{ds}{dr}=\pm\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(c^2-r^2)}}.$$

Poichè s si può prendere in modo che cresca continuamente, ne segue che $\frac{ds}{dr}$ è positivo quando r è crescente, e negativo quando r è decrescente. Ora nel passare lungo la curva da una cuspide al vertice adiacente r cresce, così $\frac{ds}{dr}$ è positivo, e dobbiamo prendere il segno *superiore* nella formola per $\frac{ds}{dr}$; indi nel passare dal vertice alla cuspide seguente r diminuisce, così $\frac{ds}{dr}$ è negativo, e deve prendersi il segno *inferiore*. Quindi la lunghezza da una cuspide alla cuspide seguente è

$$=\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int_a^c \frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int_c^a \frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}$$

$$=\frac{2\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int_a^c \frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}=\frac{8b(a+b)}{a}.$$

88. Da ciò che si è stabilito nell'articolo precedente, apparisce che se l'arco s incomincia da un vertice la formola conveniente si è

$$\frac{ds}{dr}=-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(c^2-r^2)}},$$

onde $$s=-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int\frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}=\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\sqrt{(c^2-r^2)}.$$

Non si richiede alcuna costante poichè incominciamo a misurare dal punto per quale $r=c$; la formola vale per i valori di s minori di $\frac{4b(a+b)}{a}$.

Si può osservare che così

$$s=\frac{c^2-a^2}{a^2}\sqrt{(r^2-p^2)}.$$

89. Similmente per l'ipocicloide possiamo mostrare che

$$p^2=\frac{c^2(a^2-r^2)}{a^2-c^2},\ \text{in cui}\ c=a-2b.$$

Supponiamo c^2 minore di a^2; allora possiamo mostrare che

$$\frac{ds}{dr}=\pm\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(r^2-c^2)}},$$

e così può trovarsi s. La lunghezza della curva tra due cuspidi adiacenti è $\frac{8b(a-b)}{a}$.

Supponiamo in seguito c^2 maggiore di a^2; allora dovremo scrivere il valore di $\frac{ds}{dr}$ così,

$$\frac{ds}{dr}=\pm\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(c^2-r^2)}};$$

in questo caso b è maggiore di a, e troveremo che la lunghezza della curva tra due cuspidi adiacenti è $\frac{8b(b-a)}{a}$.

Quando $a=2b$ abbiamo $c=0$ e $p=0$; in questo caso l'ipocicloide diviene una linea retta coincidente con un diametro del circolo fisso.

Se $a=b$ abbiamo $c^2=a^2$; in questo caso il denominatore nel valore di p^2 svanisce; si troverà che l'ipocicloide si riduce allora ad un punto, ed $r=a$.

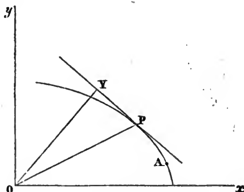
Si può mostrare come nell'Art. 88, che se s è misurato da un vertice ad un punto non al di là della cuspide adiacente, abbiamo

$$s=\pm\frac{c^2-a^2}{a^2}\sqrt{(r^2-p^2)},$$

prendendosi il segno superiore o l'inferiore secondo che c è maggiore o minore di a.

Formole che racchiudono la Perpendicolare e la sua Inclinazione.

90. Un altro metodo di esprimere la lunghezza di una curva è degno di notizia.



Sia P un punto di una curva; x, y le sue coordinate. Sia s la lunghezza dell'arco misurato da un punto fisso A sino a P. Si tiri OY perpendicolare dall'origine O sulla tangente in P, e si supponga $OY=p$, $PY=u$, $YOx=\theta$; allora

$$p = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta,$$
$$u = x \operatorname{sen}\theta - y \cos\theta,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\cot\theta, \quad \frac{ds}{dx} = -\operatorname{cosec}\theta;$$

onde

$$\frac{dp}{d\theta} = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta + \cos\theta \frac{dx}{d\theta} + \operatorname{sen}\theta \frac{dy}{d\theta} = -u,$$
$$\frac{d^2p}{d\theta^2} = -\frac{du}{d\theta} = -x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta \frac{dx}{d\theta} + \cos\theta \frac{dy}{d\theta}$$
$$= -p - \operatorname{cosec}\theta \frac{dx}{d\theta} = -p + \frac{ds}{d\theta};$$

onde, con l'integrazione,

$$\frac{dp}{d\theta} = -\int p\,d\theta + s,$$

quindi $$s = \frac{dp}{d\theta} + \int p\,d\theta;$$

questo si può anche scrivere

$$s + u = \int p\,d\theta.$$

Supponiamo s_1 ed u_1 i valori di s ed u quando θ ha il valore θ_1, ed s_2 ed u_2 i loro valori quando θ ha il valore θ_2, allora

$$s_2 - s_1 + u_2 - u_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p\,d\theta.$$

Abbiamo misurato u nella direzione della rotazione da P e lo abbiamo preso positivo in questo caso; quando u è negativo indicherà che Y è dall'altra parte di P.

I risultati precedenti si possono usare per diversi oggetti, tra i quali possiamo notarne due.

(1) Per determinare la lunghezza di una porzione di una curva quando è data l'equazione della curva; infatti da quell'equazione insieme con $\frac{dy}{dx} = -\cot\theta$ possiamo trovare x ed y per mezzo di θ, e quindi p che è eguale ad $x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$; allora s può trovarsi dall'equazione

$$s = \frac{dp}{d\theta} + \int p\,d\theta.$$

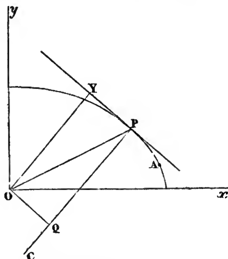
(2) Per trovare una curva tale che per mezzo del suo arco si possa rappresentare un proposto integrale; infatti se il proposto integrale è $\int p d\theta$, in cui p è una funzione di θ, la curva richiesta si ottiene eliminando θ tra le equazioni

$$x = p\cos\theta - \frac{dp}{d\theta}\operatorname{sen}\theta,\ y = p\operatorname{sen}\theta + \frac{dp}{d\theta}\cos\theta,$$

ed allora l'integrale si può rappresentare con $s - \frac{dp}{d\theta}$.

Questo articolo è stato tratto dall' *Integral Calculus* di Hymers, Art. 136.

91. I risultati dell'articolo precedente si possono ottenere in altro modo. Dinoti ρ il raggio di curvatura della curva



in P; sia $OP = r$, ed abbiano s, u, e θ lo stesso significato come sopra, allora dal Calcolo Differenziale abbiamo

$$\rho = \frac{ds}{d\theta},\quad \text{e}\quad \rho = r\frac{dr}{dp},\ \text{onde}\ \frac{dp}{d\theta} = r\frac{dr}{ds}.$$

Inoltre $$PY = r\cos OPY = -r\frac{dr}{ds};$$

quindi $$\frac{dp}{d\theta} = -PY = -u.$$

Sia PC il raggio di curvatura in P; si tiri OQ perpendicolare a PC. Il luogo di C è l'evoluta della curva AP; e QC è rispetto a questo luogo ciocchè PY è rispetto al luogo di P. Siano θ', p' le coordinate polari di Q, e sia $QC = u'$; allora

$$\theta' = \theta - \frac{\pi}{2} \text{ e } p' = u.$$

E $$QC = u' = -\frac{dp'}{d\theta'} = -\frac{dp'}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta} = \frac{d^2p}{d\theta^2}.$$

Inoltre $$\rho = PQ + QC = p + u' = p + \frac{d^2p}{d\theta^2};$$

ma $$\rho = \frac{ds}{d\theta}, \text{ quindi } s = \frac{dp}{d\theta} + \int p d\theta.$$

Dal valore di PY possiamo ottenere una facile dimostrazione di un teorema di qualche interesse nel Calcolo Differenziale (*Cal. Dif.* Art. 329). Dinoti p_1 la perpendicolare da O sul luogo di Y; allora (*Cal. Dif.* Art. 284)

$$\frac{1}{p_1^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2,$$

poichè p è il raggio vettore di Y. Così

$$\frac{1}{p_1^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{u^2}{p^4} = \frac{p^2 + u^2}{p^4} = \frac{r^2}{p^4};$$

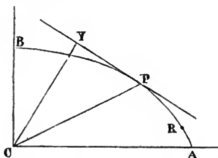
quindi $$p_1 = \frac{p^2}{r}.$$

Un caso particolare della formola

$$s_2 - s_1 + u_2 - u_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p d\theta$$

si potrebbe notare. Supponiamo che si prenda una *completa* curva ovale senza punti singolari; allora $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, ed $u_2 = u_1$; così il perimetro completo della curva è $\int_{\theta}^{\theta_1 + 2\pi} p d\theta$.

92. *Applicazione all'Ellisse.*



Sia APB un quadrante di un'ellisse, CY la perpendicolare sulla tangente in P; sia $ACY=\theta$. Allora (per la *Geometria piana analitica*) $CY = a\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}$;

onde $$AP + PY = a\int\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}\,d\theta,$$

la costante da aggiungersi all'integrale si suppone essere presa in modo che l'integrale svanisca con θ. Se R è un punto tale che il suo angolo eccentrico sia $\frac{\pi}{2}-\theta$, abbiamo, per l'Art. 78,

$$BR = a\int\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}\,d\theta;$$

così $$AP + PY = BR \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

E $$PY = -\frac{dp}{d\theta} = \frac{ae^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}}.$$

Sia x l'ascissa di P; allora per l'Art. 90,

$$x = p\cos\theta - \frac{dp}{d\theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$= a\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}\cos\theta + \frac{ae^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}} = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}}.$$

Così $PY = e^2 x\operatorname{sen}\theta$; e se x' è l'ascissa di R abbiamo $x' = a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ sicchè $PY = \frac{e^2xx'}{a}$. Così (1) si può scrivere

$$BR - AP = \frac{e^2}{a}xx' \ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

questo risultato si chiama il Teorema di Fagnani.

Dai valori notati di x ed x' abbiamo

$$x^2 = \frac{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{a^2 - x'^2}{1 - \frac{e^2 x'^2}{a^2}};$$

quindi $$e^2 x^2 x'^2 - a^2 (x^2 + x'^2) + a^4 = 0.$$

Così l'equazione che lega x ed x' racchiude queste quantità *simmetricamente;* quindi da (2) possiamo inferire che

$$BP - AR = \frac{e^2}{a} xx'.$$

Questo è anche chiaro dalla figura.

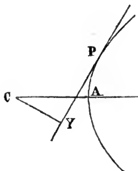
Possiamo osservare che il valore di PY si può ottenere più semplicemente per mezzo di una nota proprietà dell'ellisse. Infatti supponiamo condotta la normale in P che incontri CA in G; e per P si tiri la parallela a CA che incontri CY in Q. Allora $PQ = CG = e^2 x$, per la natura dell'ellisse; e

$$PY = PQ \operatorname{sen} \theta = e^2 x \operatorname{sen} \theta.$$

93. *Applicazione all'Iperbole.*

Sia C il centro ed A il vertice di un'iperbole, CY la perpendicolare sulla tangente in P. Sia $ACY = \theta$ e $CY = p$; allora si può dimostrare che

$$PY - AP = a \int \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}\, d\theta.$$



Questo può dimostrarsi nello stesso modo del risultato corrispondente dell'articolo precedente; possiamo o fare i convenienti cangiamenti di segno nelle formole dell'Art. 90, che provengono dalla differenza della figura; o possiamo incominciare da capo nel modo di quell'articolo. La costante da aggiungersi all'integrale si suppone presa in modo che l'integrale svanisca con θ.

Si supponga α il massimo valore che θ può avere, allora (per la *Geometria piana analitica*), $\cot\alpha = \sqrt{(e^2 - 1)}$. Quando P si allontana a distanza infinita $PY - AP$ diviene la differenza tra la lunghezza dell'asintoto da C e l'infinito arco iperbolico da A. Così questa differenza è

$$a\int_0^\alpha \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}\, d\theta.$$

Quistioni inverse sulle lunghezze delle curve.

94. Negli articoli precedenti abbiamo mostrato come possa trovarsi la lunghezza di un arco di una curva conosciuta in termini dell'ascissa della sua estremità variabile; noteremo ora brevemente il problema inverso di trovare una curva tale che l'arco sia una data funzione dell'ascissa della sua estremità variabile.

Supponiamo $\varphi(x)$ la funzione data; allora $s = \varphi(x)$;

onde $$\varphi'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}};$$

così $$\frac{dy}{dx} = [\{\varphi'(x)\}^2 - 1]^{\frac{1}{2}},$$

ed $$y = \int [\{\varphi'(x)\}^2 - 1]^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

95. Come un esempio del metodo precedente, supponiamo $\varphi(x) = \sqrt{(4cx)}$; così $\varphi'(x) = \sqrt{\frac{c}{x}}$; onde

$$y=\int\left[\frac{c}{x}-1\right]^{\frac{1}{2}}dx=\int\frac{(c-x)\,dx}{\sqrt{(cx-x^2)}}$$

$$=\int\frac{\left(\frac{c}{2}-x\right)dx}{\sqrt{(cx-x^2)}}+\frac{c}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(cx-x^2)}}$$

$$=\sqrt{(cx-x^2)}+\frac{c}{2}\,\text{vers}^{-1}\frac{2x}{c}+C.$$

Possiamo scrivere y' per $y-C$ e così troviamo che la curva è una cicloide (*Cal. Dif.* Art. 358).

96. Per un altro esempio supponiamo $\varphi(x)=a\log x$; così $\varphi'(x)=\frac{a}{x}$.

Qui $$y=\int\sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)}dx=\int\frac{(a^2-x^2)\,dx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$=\int\frac{a^2dx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$=a\log\frac{x}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}+\sqrt{(a^2-x^2)}+C.$$

Involute ed Evolute.

97. La lunghezza di un arco di una curva si può esprimere senza integrazione quando conosciamo l'equazione dell'involuta della curva. Supponiamo che s' rappresenti la lunghezza di un arco di una curva, ρ il raggio di curvatura in quel punto dell'involuta che corrisponde all'estremità variabile di s', allora (*Cal. Dif.* Art. 331) $s'\pm\rho=l$, in cui l è una costante. Se l'equazione dell'involuta è conosciuta, ρ può trovarsi in termini delle coordinate del punto dell'involuta; indi queste coordinate si possono esprimere in termini delle coordinate dal punto corrispondente dell'evoluta, e così si conosce s'. Con questo metodo eseguiamo il procedimento di differenziazione e di riduzione algebrica invece dell'integrazione.

98. *Applicazione all'Evoluta della Parabola.*

Prendiamo per involuta la parabola che ha per sua equazione $y^2 = 4ax$; siano x', y' le coordinate del punto dell'evoluta che corrisponde al punto (x, y) sulla parabola. Allora con i metodi ordinarii (*Cal. Dif.* Art. 330) abbiamo

$$x' = 2a + 3x, \quad y' = -\frac{y^3}{4a^2},$$

e
$$\rho = 2a\left(\frac{a+x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Così otterremo per l'equazione dell'evoluta

$$27ay'^2 = 4(x' - 2a)^3;$$

e
$$\rho = 2a\left(\frac{x'+a}{3a}\right)^{\frac{3}{2}};$$

onde
$$s' \pm 2a\left(\frac{x'+a}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} = l.$$

Supponiamo che si misuri s' dal punto pel quale $x' = 2a$, cioè, dal punto che corrisponde al vertice della parabola; allora vediamo che s' cresce con x', sicchè dobbiamo prendere il segno inferiore nell'ultima equazione; inoltre supponendo $x' = 2a$ ed $s' = 0$ troviamo $l = -2a$; così

$$s' = 2a\left(\frac{x'+a}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} - 2a.$$

Questo valore di s' si può ancho ottenere con l'applicazione del metodo ordinario d'integrazione.

99. Quando la lunghezza dell'arco di una curva è conosciuta in termini delle coordinate della sua estremità variabile, l'equazione dell'involuta si può trovare col procedimento ordinario di eliminazione.

Infatti abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 331).

$$\frac{\frac{dx'}{dx}}{x' - x} = \pm\frac{1}{\rho}\frac{ds'}{dx},$$

in cui le lettere accentate si riferiscono ad un punto di una curva, e le lettere senza accento al punto corrispondente dell'involuta. Così

$$x = x' \mp \rho \frac{dx'}{ds'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Similmente

$$y = y' \mp \rho \frac{dy'}{ds'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Quindi se s' è conosciuto in termini di x', o di y', o di tutte e due, per mezzo di questa relazione e della data equazione della curva possiamo trovare $\frac{dx'}{ds'}$ e $\frac{dy'}{ds'}$; e ρ è conosciuto dall'equazione $s' \mp \rho = l$. Rimane quindi solamente ad eliminare x' ed y' da (1) e (2) e la nota equazione della curva; otteniamo così un'equazione tra x ed y, che è l'equazione richiesta dell'involuta.

100. *Applicazione alla Catenaria.*

L'equazione della catenaria è

$$y' = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x'}{c}} + e^{-\frac{x'}{c}}\right),$$

ed

$$s' = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x'}{c}} - e^{-\frac{x'}{c}}\right),$$

supponendo s' misurato dal punto pel quale $x' = 0$ ed $y' = c$; troveremo ora l'equazione di quell'involuta della catenaria che incomincia dal punto della curva testè indicato.

Abbiamo allora

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{s'}{c}, \qquad \frac{ds'}{dx'} = \frac{y'}{c};$$

così

$$\frac{dy'}{ds'} = \frac{s'}{y'}, \qquad \frac{dx'}{ds'} = \frac{c}{y'};$$

e $\rho = s'$, non richiedendosi alcuna costante, poichè per la supposizione ρ svanisce con s'.

Quindi le equazioni (1) e (2) dell'articolo precedente divengono

$$x = x' - \frac{s'c}{y'};$$

$$y = y' - \frac{s'^2}{y'} = \frac{y'^2 - s'^2}{y'} = \frac{c^2}{y'}.$$

Ed $\quad s' = \sqrt{(y'^2 - c^2)} = \sqrt{\left(\frac{c^4}{y^2} - c^2\right)} = \frac{c}{y}\sqrt{(c^2 - y^2)};$

onde $\quad \frac{s'}{y'} = \frac{\sqrt{(c^2 - y^2)}}{c};$

così $\quad x = x' - \sqrt{(c^2 - y^2)}$; onde $x' = \sqrt{(c^2 - y^2)} + x$.

Dobbiamo quindi sostituire questi valori di x' ed y' nell'equazione della catenaria, e così otteniamo la richiesta relazione tra x ed y. La sostituzione si può effettuare convenientemente così,

$$y' = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x'}{c}} + e^{-\frac{x'}{c}}\right);$$

onde $\quad \sqrt{(y'^2 - c^2)} = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x'}{c}} - e^{-\frac{x'}{c}}\right);$

onde $\quad y' + \sqrt{(y'^2 - c^2)} = ce^{\frac{x'}{c}},$

quindi $\quad x' = c \log \frac{y' + \sqrt{(y'^2 - c^2)}}{c}.$

Così finalmente, $\quad x + \sqrt{(c^2 - y^2)} = c \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - y^2)}}{y}.$

Questa curva si chiama la *trattrice*; a motivo del radicale, vi sono due valori di x per ogni valore di y minore di c, questi due valori essendo numericamente eguali, ma di segni opposti. Vi è una cuspide nel punto pel quale $x = 0$ ed $y = 0$; e l'asse delle x è un asintoto.

101. Le formole polari si possono anche usare in simil modo per determinare l'involuta quando la lunghezza di un arco dell'evoluta si può esprimere in termini delle coordinate polari della sua estremità variabile. Abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 332).

$$r'^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho p \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$p'^2 = r^2 - p^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Qui, come sopra, le lettere accentate appartengono alla curva nota, cioè all'evoluta, e le lettere senza accento alla richiesta involuta; così poichè l'evoluta è nota, vi è una conosciuta relazione tra p' ed r'. Ed $s' \mp \rho = l$, sicchè se s' si può esprimere in termini di p' ed r' possiamo eliminare p' ed r' per mezzo di (1), (2), e la relazione nota tra p' ed r'. Così otteniamo un'equazione tra p ed r, che serve a determinare l'involuta.

102. *Applicazione alla Spirale equiangola.*

In questa curva $p' = r' \operatorname{sen} \alpha$, in cui α è l'angolo costante della spirale. Se supponiamo che l'involuta incominci dal polo della spirale, ed s' sia misurato da quel punto, abbiamo $\rho = s' = r' \sec \alpha$ (Art. 84). Così (1) dell'articolo precedente diviene

$$r'^2 = r'^2 \sec^2 \alpha + r^2 - 2r' p \sec \alpha$$

$$= r'^2 \sec^2 \alpha + r'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + p^2 - 2r' p \sec \alpha, \text{ per } (2).$$

Da quest'equazione quadratica in p otteniamo

$$p - r' \sec \alpha = \pm r' \cos \alpha.$$

Se prendiamo il segno superiore troviamo $p = \dfrac{r'(1 + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha}$, ed allora da (2) abbiamo $r^2 = \dfrac{1 + 3\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} r'^2$. Ma questa soluzione deve essere rigettata, poichè da essa troveremmo ρ o $r\dfrac{dr}{dp} = \dfrac{1 + 3\cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha)} r'$, che non è d'accordo con l'equazione $\rho = r' \sec \alpha$.

Se prendiamo il segno inferiore troviamo $p = \dfrac{r' \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha}$, ed allora da (2) troviamo $r^2 = \dfrac{r'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$; così $p = r \operatorname{sen} \alpha$. Quindi l'involuta è una spirale equiangola con lo stesso angolo costante come nell'evoluta,

Equazione intrinseca di una Curva.

103. Dinoti s la lunghezza di un arco di una curva misurata da un punto fisso, φ l'inclinazione della tangente nell'estremità variabile sulla tangente in un punto fisso della curva; allora l'equazione che determina la relazione tra s e φ si chiama *l'equazione intrinseca* della curva. In alcune ricerche, specialmente quelle relativo alle involute ed evolute, questo metodo di determinare una curva è più semplice del metodo ordinario di riferire la curva ad assi rettangolari che sono linee *estrinseche*.

104. Mostreremo prima come si può ottenere l'equaziono *intrinseca* dall'equazione ordinaria.

Supponiamo che $y=f(x)$ sia l'equazione della curva, essendo l'origine un punto della curva, e l'asse delle y la tangente in quel punto; dall'equazione data abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{1}{\tan\varphi} \text{ per ipotesi;}$$

così x è conosciuta in termini di $\tan\varphi$, o sia $x=F(\tan\varphi)$; allora

$$\frac{dx}{d\varphi}=F'(\tan\varphi)\sec^2\varphi\,;$$

inoltre
$$\frac{ds}{dx}=\operatorname{cosec}\varphi\,;$$

onde
$$\frac{ds}{d\varphi}=F'(\tan\varphi)\sec^2\varphi\operatorname{cosec}\varphi\,;$$

da quest'equazione con l'integrazione si può trovare s in termini di φ. Un simile risultato si otterrà se nell'origine si suppone che l'asse delle x coincida con la tangente.

105. *Applicazione alla Cicloide.*

Dal *Cal. Dif.* Art. 358, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{2a-x}{x}\right)}=\frac{1}{\tan\varphi}\,;$$

ondo $\frac{2a}{x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}$, $x = 2a \operatorname{sen}^2\varphi$,

$$\frac{dx}{d\varphi} = 4a \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi,$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \operatorname{cosec}\varphi \frac{dx}{d\varphi} = 4a \cos\varphi;$$

ondo $s = 4a \operatorname{sen}\varphi + C.$

La costante sarà zero se supponiamo s misurato dal punto fisso nel quale si è tirata la prima tangente, cioè, dal vertice della curva.

106. Essendo data l'equazione intrinseca dedurre l'equazione ordinaria.

Abbiamo $\frac{dx}{ds} = \operatorname{sen}\varphi;$

onde $x = \int ds \operatorname{sen}\varphi.$

Similmente $y = \int ds \cos\varphi.$

Ora per supposizione si conosce s in termini di φ; così con l'integrazione possiamo trovare x ed y in termini di φ, ed allora eliminando φ otteniamo l'equazione ordinaria della curva in termini di x ed y.

107. *Applicazione alla Cicloide.*

Quì $s = 4a \operatorname{sen}\varphi$;

così $x = \int ds \operatorname{sen}\varphi = 4a \int \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = C - a \cos 2\varphi,$

$$y = \int ds \cos\varphi = 4a \int \cos^2\varphi \, d\varphi = C' + 2a\varphi + a \operatorname{sen} 2\varphi.$$

Quindi eliminando φ possiamo ottenere l'equazione ordinaria; se l'origine degli assi rettangolari è il vertice della curva, avremo $C = a$ e $C' = 0$.

108. Daremo ora diversi esempii di equazioni intrinseche. L'equazione intrinseca del circolo evidentemente è $s=a\varphi$.

109. L'equazione della catenaria è

$$y+c=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

l'origine essendo sulla curva. Quindi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right), \quad s=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right);$$

così se φ è l'angolo che la tangente in un punto qualunque fa con la tangente nell'origine,

$$s=c\tan\varphi.$$

110. Abbiamo veduto nell'Art. 86, che per l'epicicloide

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta-\cos\frac{a+b}{b}\theta}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta-\operatorname{sen}\theta}=\tan\varphi \text{ supponiamo,}$$

così

$$\varphi=\frac{a+2b}{2b}\theta.$$

Inoltre, per lo stesso articolo,

$$\begin{aligned} s&=-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\sqrt{(c^2-r^2)}+C\\ &=-\frac{4b(a+b)}{a}\cos\frac{a\theta}{2b}+C\\ &=\frac{4b(a+b)}{a}\left(1-\cos\frac{a\theta}{2b}\right), \end{aligned}$$

se supponiamo s misurato dal punto pel quale $\theta=0$.

Così
$$s=\frac{4b(a+b)}{a}\left(1-\cos\frac{a\varphi}{a+2b}\right).$$

Possiamo semplificare questo risultato ponendo

$$\varphi=\frac{\pi(a+2b)}{2a}+\varphi', \quad \text{ed } s=\frac{4b(a+b)}{a}+s';$$

ciò corrisponde a misurare l'arco da un vertice invece che da una cuspide. Così

$$s' = \frac{4b(a+b)}{a} \operatorname{sen} \frac{a\varphi'}{a+2b},$$

in cui l'accento può ora togliersi.

111. Similmente l'equazione intrinseca dell'ipocicloide si può scrivere

$$s = \frac{4b(a-b)}{a} \operatorname{sen} \frac{a\varphi}{a-2b}.$$

112. Apparisce dai due ultimi articoli che $s = l \operatorname{sen} n\varphi$ rappresenta un'epicicloide o un'ipocicloide, secondo che n è minore o maggiore dell'unità. Per esempio, se

$$s = l \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2},\ s = l \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3},\ s = l \operatorname{sen}\frac{\varphi}{4},\ s = l \operatorname{sen}\frac{\varphi}{5}, \ldots$$

abbiamo epicicloidi nelle quali $\frac{b}{a} = \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2, \ldots$

Se $s = l \operatorname{sen} 2\varphi,\ s = l \operatorname{sen} 3\varphi,\ s = l \operatorname{sen} 4\varphi,\ s = l \operatorname{sen} 5\varphi, \ldots$ abbiamo ipocicloidi nelle quali $\frac{b}{a} = \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{5}, \ldots$

113. Se ρ è il raggio di curvatura della curva nel punto determinato da s e φ, abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 324)

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Nella spirale logaritmica sappiamo che ρ varia proporzionalmente ad s se l'arco è misurato dal polo; così

$$\rho = ks = \frac{ds}{d\varphi};$$

onde $k = \frac{1}{s}\frac{ds}{d\varphi}$, e quindi con l'integrazione

$$k\varphi + \text{costante} = \log s;$$

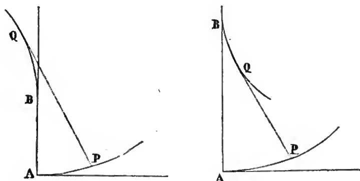
quindi $$s = ae^{k\varphi},$$

in cui a è una costante. Se poniamo $s = s' + a$ abbiamo

$$s' = a\,(e^{k\varphi} - 1),$$

ed ora s' è misurato dal punto pel quale $\varphi = 0$.

114. Se l'equazione intrinseca di una curva è conosciuta, può trovarsi quella dell'evoluta.



Sia AP una curva, BQ l'evoluta; sia s la lunghezza di un arco di AP misurato da un punto fisso sino a P; s' la lunghezza di un arco di BQ misurato da un punto fisso sino a Q. È evidente che φ è lo stesso per s ed s', se in BQ misuriamo φ da BA, che è perpendicolare alla linea dalla quale si misura φ in AP.

Nella figura a sinistra $s' = \rho - C = \dfrac{ds}{d\varphi} - C$.

Nella figura a dritta $s' = C - \rho = C - \dfrac{ds}{d\varphi}$.

Così se s è conosciuto in termini di φ, possiamo trovare s' espresso in φ. La costante C è eguale al valore di ρ nel punto corrispondente a quello pel quale $s' = 0$.

115. Per esempio, nella cicloide $s = 4a \operatorname{sen} \varphi$; così

$$s' = C - 4a \cos \varphi.$$

Si ponga $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$ ed $s' = \sigma + C$; così

$$\sigma = 4a \operatorname{sen} \psi.$$

Questo mostra che l'evoluta è una cicloide eguale.

116. Similmente conoscendo l'equazione intrinseca di una curva, può trovarsi quella dell'involuta. Infatti per l'Art. 114

$$\frac{ds}{d\varphi} = C \pm s';$$

onde $$s = \int (C \pm s')\, d\varphi.$$

Così se s' è conosciuto in termini di φ, possiamo trovare s espresso in φ.

117. Per esempio, nel circolo $s' = a\varphi$. Così

$$s = \int (C \pm a\varphi)\, d\varphi = C\varphi \pm \frac{a\varphi^2}{2} + C'.$$

Se supponiamo che s incominci dove $\varphi = 0$ abbiamo $C' = 0$, ed inoltre, se s incomincia dove l'involuta incontra il circolo abbiamo $C = 0$; così $s = \frac{a\varphi^2}{2}$. (Si vegga *Cal. Dif.* Art. 333).

118. È chiaro che con i metodi degli Art. 114 e 116 possiamo trovare l'evoluta dell'evoluta di una curva, o l'involuta dell'involuta di una curva, e così di seguito.

119. Lo studente si può esercitare nel tracciare curve per mezzo delle loro equazioni intrinseche; egli troverà utile di prendere una curva tale come la cicloide, la forma della quale è ben conosciuta, e riconoscere che l'equazione intrinseca conduce a quella forma; egli può quindi prendere alcuna delle epicicloidi o ipocicloidi date nell'Art. 112. Per ulteriore informazione su questo soggetto, e per le figure illustrative, lo studente può consultare due memorie del D.r Whewell, pubblicate nelle *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. VIII. pag. 659, e Vol IX. pag. 150.

Curve a doppia Curvatura.

120. Siano x, y, z le coordinate di un punto di una curva nello spazio; $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ le coordinate di un punto adiacente sulla curva. Allora si conosce per i principii della geometria solida, che la lunghezza della corda che congiunge questi due punti è $\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\}}$. Sia s la lunghezza dell'arco della curva misurato da un punto fisso sino ad (x, y, z); e sia $s+\Delta s$ la lunghezza dell'arco misurato dallo stesso punto fisso sino ad $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Ammetteremo che Δs serbi alla corda che congiunge i punti adiacenti un rapporto che è ultimamente eguale all'unità quando il secondo punto si muove lungo la curva sino al primo punto. Così il limite di

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\}}}, \text{ cioè, di } \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2\right\}}},$$

è l'unità. Quindi

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}},$$

onde
$$s=\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}\,dx.$$

Dalle equazioni della curva $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ si possono esprimere in x, e quindi con l'integrazione si conoscerà s in termini di x.

121. Rispetto a ciò che si è ammesso nell'articolo precedente, lo studente può riferirsi al *Cal. Dif.* Art. 307, 308; egli può anche consultare il ***Differential and Integral Calculus*** di De Morgan, pag. 444, e l'***Integral Calculus*** di Homersham Cox, pag. 95.

122. Supponiamo, per esempio, che la curva sia determinata dalle equazioni

$$y^2=4ax \ldots\ldots (1),$$

$$z=\sqrt{(2cx-x^2)}+c\,\text{vers}^{-1}\frac{x}{c} \ldots\ldots (2),$$

sicchè la curva è formata dall'intersezione di due cilindri, cioè un cilindro che ha le sue generatrici parallele all'asse delle z, e che poggia sulla parabola nel piano delle (x, y) data da (1), ed un cilindro che ha le sue generatrici parallele all'asse delle y, e che ha per base la cicloide nel piano delle (x, z) data da (2). Allora

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)}, \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2c - x}{x}\right)};$$

onde

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{2c}{x} - 1\right)} = \sqrt{\left(\frac{2c + a}{x}\right)};$$

quindi

$$s = \sqrt{(2c + a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{(2c + a)}\sqrt{x}.$$

Non si richiede alcuna costante se misuriamo l'arco dall'origine delle coordinate.

123. La formola data nell'Art. 120 si può cambiare in

$$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\, dy,$$

ed

$$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right\}}\, dz,$$

ed in alcuni casi queste forme possono essere più convenienti di quella nell'Art. 120.

124. Alle volte una curva nello spazio è determinata da tre equazioni, le quali esprimono x, y, z rispettivamente per mezzo di una variabile ausiliaria; allora eliminando questa variabile, possiamo, se è necessario, ottenere due equazioni tra x, y, e z, e così determinare la curva nel modo ordinario. Supponiamo adunque che ciascuna delle x, y, z sia una funzione nota di t; allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}};$$

ed
$$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}\, dx$$
$$= \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} \frac{dx}{dt}\, dt$$
$$= \int \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}\, dt$$

125. *Applicazione all' Elica.*

Questa curva può essere determinata dalle equazioni

$$x = a \cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad z = ct;$$

così
$$s = \sqrt{(a^2 + c^2)} \int dt = t \sqrt{(a^2 + c^2)} + C.$$

126. Quando si adoperano le coordinate polari per determinare la posizione di un punto nello spazio, abbiamo le seguenti equazioni che legano le coordinate rettangolari e polari di un punto qualunque,

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

E come una curva nello spazio è determinata da due equazioni tra x, y, e z, essa può anche essere determinata da due equazioni tra r, θ, e φ. Così possiamo concepire che r e φ siano funzioni conosciute di θ, e quindi x, y, e z diventino funzioni note di θ.

Quindi

$$\frac{dx}{d\theta} = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \frac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{d\varphi}{d\theta} + r \cos \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{dr}{d\theta} + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\theta} + r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta.$$

Onde $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + r^2,$

ed $$s=\int\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\,\text{sen}^2\,\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2\right\}}\,d\theta.$$

Questo può trasformarsi in

$$s=\int\sqrt{\left\{r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2+1+r^2\,\text{sen}^2\,\theta\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right\}}\,dr$$

o in $$s=\int\sqrt{\left\{r^2\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\,\text{sen}^2\,\theta\right\}}\,d\varphi.$$

127. Se p è la perpendicolare dall'origine sulla tangente di una curva nello spazio, allora l'equazione

$$\frac{ds}{dr}=\frac{r}{\sqrt{(r^2-p^2)}},$$

che si dimostrò per una curva *piana* nell'Art. 85, reggerà ancora. Infatti ciascun membro dell'equazione esprime la secante dell'angolo che la tangente fa col raggio vettore al punto di contatto.

Quindi $$s=\int\frac{rdr}{\sqrt{(r^2-p^2)}}.$$

ESEMPII.

1. Per quali valori di m ed n le curve $a^m y^n = x^{m+n}$ sono *rettificabili?* (Si vegga l'Art. 15.)

   Risultato. Se $\frac{n}{2m}$ o $\frac{n}{2m}+\frac{1}{2}$ è un intero.

2. Mostrare che la lunghezza dell'arco di una Trattrice misurato dalla cuspide è determinata da $s=c\log\frac{c}{y}$.

3. Mostrare che la Cissoide è rettificabile.

4. Mostrare che l'intera lunghezza della curva che ha per equazione $4(x^2+y^2)-a^2=3a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ è eguale a $6a$.

   [Si può dimostrare che $\left(\frac{ds}{dy}\right)^2=\frac{a^{\frac{4}{3}}}{4y^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)}$].

5. La lunghezza dell'arco della curva

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}-(x-y)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

tra i limiti (x_1, y_1) ed (x, y) è

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(x_1+y_1)^{\frac{2}{3}}+(x_1-y_1)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}.$$

6. Se $s=ae^{\frac{x}{c}}$, trovare la relazione tra x ed y.

7. Mostrare che l'equazione intrinseca della parabola è

$$\frac{ds}{d\varphi}=\frac{2a}{\cos^3\varphi} \text{ o } s=\frac{a}{2}\log\frac{1+\operatorname{sen}\varphi}{1-\operatorname{sen}\varphi}+\frac{a\operatorname{sen}\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}.$$

8. L'equazione intrinseca della curva $y^3=ax^2$ è

$$s=\frac{8a}{27}(\sec^3\varphi-1).$$

9. Mostrare che la lunghezza dell'arco dell'evoluta di una parabola dalla cuspide sino al punto in cui l'evoluta incontra la parabola è $2a(3\sqrt{3}-1)$; in cui $4a$ è il lato retto della parabola.

10. L'evoluta di un'epicicloide è un'epicicloide, il raggio del circolo fisso essendo $\frac{a^2}{a+2b}$ ed il raggio del circolo generatore $\frac{ab}{a+2b}$. (Art. 110 e 114.)

11. Mostrare che se l'equazione di una curva si trova eliminando θ tra le equazioni

$$x=\operatorname{sen}\theta\,\psi'(\theta)+\cos\theta\,\psi''(\theta),$$

ed $\quad y=\cos\theta\,\psi'(\theta)-\operatorname{sen}\theta\,\psi''(\theta),$

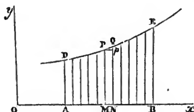
allora $\quad s=\psi(\theta)+\psi''(\theta).$

12. Mostrare che la lunghezza della curva $8a^3y=x^4+6a^2x^2$ misurata dall'origine è $\frac{x}{8a^3}(x^2+4a^2)^{\frac{3}{2}}$.

CAPITOLO VII.

AREE DELLE CURVE PIANE E DELLE SUPERFICIE.

Aree piane. Formole rettangolari. Semplice integrazione.



128. Sia *DPE* una curva, di cui l'equazione è $y=\varphi(x)$, e supponiamo essere x, y le coordinate di un punto *P*. Dinoti *A* l'area racchiusa tra la curva, l'asse delle x, l'ordinata *PM*, ed un'ordinata fissa *AD*, allora (*Cal. Dif.* Art. 43)

$$\frac{dA}{dx}=\varphi(x);$$

onde
$$A=\int \varphi(x)\,dx.$$

Sia $\psi(x)+C$ l'integrale di $\varphi(x)$; così

$$A=\psi(x)+C.$$

Dinoti A_1 l'area quando l'ordinata variabile è ad una distanza x dall'asse delle y, e dinoti A_2 l'area quando l'or-

dinata variabile è ad una distanza x_2 dall'asse delle y; allora

$$A_1 = \psi(x_1) + C, \quad A_2 = \psi(x_2) + C;$$

quindi $$A_2 - A_1 = \psi(x_2) - \psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx.$$

129. *Applicazione al Circolo.*

L'equazione del circolo riferito al suo centro come origine è $y^2 = a^2 - x^2$; quì $\varphi(x) = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; così

$$A = \int \varphi(x)\, dx = \int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + C.$$

La costante C svanisce se supponiamo che l'*ordinata fissa* coincida con l'asse delle y. Si vedrà tracciando una figura, che l'area compresa tra l'asse delle x, l'asse delle y, il circolo, e l'ordinata alla distanza x dall'asse delle y, si può dividere in un triangolo ed un settore, i valori dei quali sono dati dal primo e dal secondo termine dell'espressione precedente di A. Questa osservazione può essere d'aiuto allo studente per rammentare l'importante integrale

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}.$$

130. *Applicazione all'Ellisse.*

Supponiamo si voglia trovare l'area totale dell'ellisse. L'equazione dell'ellisse si può scrivere $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Quindi l'area di un quadrante dell'ellisse

$$= \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{b}{a} \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4};$$

quindi l'area dell'ellisse è πab.

131. *Applicazione alla Parabola.*

L'equazione della Parabola è $y^2 = 4ax$; quì dunque

$$\varphi(x) = \sqrt{(4ax)},$$

ed $$\int \sqrt{(4ax)}\, dx = \frac{4\sqrt{a}}{3} x^{\frac{3}{2}} + C;$$

così con la notazione dell'Art. 128

$$A_2 - A_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(4ax)}\, dx = \frac{4\sqrt{a}}{3}(x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}).$$

Se $x_1 = 0$ abbiamo per l'area $\frac{4\sqrt{a}}{3} x_2^{\frac{3}{2}}$, cioè, due terzi del prodotto dell'ascissa x_2 e dell'ordinata $\sqrt{(4ax_2)}$.

132. *Applicazione alla Cicloide.*

L'integrazione richiesta dalla formola $\int y dx$ diviene alle volte più facile se esprimiamo x ed y in termini di una nuova variabile. Così, per esempio, nella cicloide possiamo porre (*Cal. Dif.* Art. 358)

$$x = a(1 - \cos\theta), \quad y = a(\theta + \operatorname{sen}\theta);$$

quindi $$\int y dx = a^2 \int (\theta + \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \int \theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta + \frac{a^2}{2}\int (1 - \cos 2\theta)\, d\theta;$$

ciò dà $$a^2(-\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + \frac{a^2}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right).$$

Se prendiamo questo tra i limiti 0 e π per θ, otteniamo l'area di una mezza cicloide; il risultato è $\frac{3a^2\pi}{2}$. Quindi l'area dell'intera cicloide è eguale a tre volte quella del circolo generatore.

133. Le equazioni della *compagna della cicloide* sono

$$x = a(1 - \cos\theta), \quad y = a\theta;$$

da ciò si può mostrare che l'area dell'intera curva è due volte quella del circolo generatore.

134. Se una curva è determinata dall'equazione $x = \varphi(y)$, allora l'area contenuta tra la curva, l'asse delle y, e le linee

parallele all'asse delle x alle distanze eguali rispettivamente ad y_1 ed y_2 è $\int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\, dy$. Ciò è manifesto dopo la dimostrazione della simile proposizione nell'Art. 128.

135. Le formole negli Art. 128 e 134 forniscono uno dei più semplici ed importanti esempii dell'applicazione del Calcolo Integrale. Come abbiamo già osservato, il problema di determinare le aree delle curve fu uno di quelli che diedero origine al Calcolo Integrale, ed i simboli adoperati sono molto espressivi del procedimento necessario per risolvere il problema. Nella figura dell'Art. 128, lo studente vedrà che il rettangolo $PpNM$ si può appropriatamente dinotare con $y\Delta x$, ed il procedimento per trovare l'area di $ADEB$ si riduce a questo; prima si effettua l'addizione dinotata da $\Sigma y\Delta x$, e poi si diminuisce Δx indefinitamente.

136. Supponiamo che si voglia l'area contenuta tra la curva $y = c \operatorname{sen} \frac{x}{a}$, l'asse delle x, e le ordinate alle distanze x_1 ed x_2 rispettivamente dall'asse delle y. Abbiamo

$$c\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\, dx = ca\left(\cos\frac{x_1}{a} - \cos\frac{x_2}{a}\right).$$

Si supponga quindi $x_1 = 0$ ed $x_2 = a\pi$; l'area è $2ca$. In seguito si supponga $x_1 = 0$ ed $x_2 = 2a\pi$; il risultato

$$ca\left(\cos\frac{x_1}{a} - \cos\frac{x_2}{a}\right)$$

diviene zero in questo caso, il che evidentemente è inammissibile, poichè l'area deve essere una quantità positiva. Infatti $\operatorname{sen}\frac{x}{a}$ è *negativo* da $x = a\pi$ sino ad $x = 2a\pi$, ma nella dimostrazione che l'area è eguale ad $\int y dx$, si suppone che y sia *positiva*. Se y è realmente negativa l'area sarà $\int (-y)\, dx$.

Così nell'esempio attuale l'area non sarà

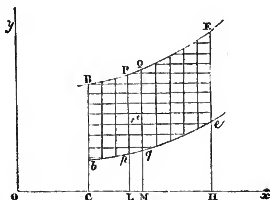
$$c\int_0^{2a\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\, dx \;\text{ ma }\; c\int_0^{a\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\, dx + c\int_{a\pi}^{2a\pi}\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{a}\right) dx,$$

cioè, $$c\int_0^{a\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\,dx - c\int_{a\pi}^{2a\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\,dx;$$

ciò darà $2ca + 2ca$, cioè, $4ca$.

Aree piane. Formole rettangolari. Doppia Integrazione.

137. Nell'Art. 128 abbiamo ottenuto una formola per trovare l'area di una curva; questa formola suppone che l'area sia il limite di più aree elementari, ciascun elemento essendo una quantità di cui $y\Delta x$ è il tipo. Procediamo ora a spiegare un altro modo di decomporre l'area richiesta in aree elementari.



Supponiamo che si voglia l'area racchiusa tra le curve $BPQE$ e $bpqe$, e le linee rette Bb ed Ee. Si tiri una serie di linee parallele all'asse delle y, ed un'altra serie di parallele all'asse delle x. Rappresenti st uno dei rettangoli così formati, e supponiamo essere x ed y le coordinate di s, ed $x + \Delta x$ ed $y + \Delta y$ le coordinate di t; allora l'area del rettangolo st è $\Delta x\Delta y$. Quindi l'area richiesta si può trovare sommando tutt'i valori di $\Delta x\Delta y$, e poi procedendo al limite che si ottiene supponendo che Δx e Δy diminuiscano indefinitamente.

Si effettua la richiesta sommazione dei termini come $\Delta x\Delta y$ nel modo seguente: riuniamo prima tutt'i rettangoli simili

ad *st* che sono contenuti nella striscia *PQqp*, ed otteniamo così l'area di questa striscia; in seguito sommiamo tutte le striscie simili a questa striscia che giacciono tra *Bb* ed *Ee*. L'errore che possiamo commettere trascurando l'elemento dell'area posto nella parte superiore e nella inferiore di ciascuna striscia, e che non è un rettangolo completo, sparirà nel limite quando Δx e Δy si diminuiscono indefinitamente.

Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione della curva superiore, ed $y=\psi(x)$ l'equazione della curva inferiore; sia $OC=c$ ed $OH=h$, allora se A dinota l'area richiesta, abbiamo

$$A=\int_c^h\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dx\,dy;$$

poichè l'espressione simbolica quì data dinota il procedimento che abbiamo stabilito pocanzi in parole.

Ora $\int dy=y$, quindi $\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dy=\varphi(x)-\psi(x)$; così abbiamo

$$A=\int_c^h \{\varphi(x)-\psi(x)\}\,dx.$$

In questa forma possiamo immediatamente vedere la verità dell'espressione, poichè $\varphi(x)-\psi(x)=PL-pL=Pp$; così $\{\varphi(x)-\psi(x)\}\Delta x$ si può prendere per l'area della striscia *PQqp*, e la formola asserisce che A è eguale al limite della somma di tali striscie.

Le linee nella figura non sono necessariamente equidistanti: cioè, gli elementi di cui $\Delta x\Delta y$ è il tipo non sono necessariamente tutti della stessa area.

138. Il risultato dell'articolo precedente si è, che l'area A è data dall'equazione

$$A=\int_c^h \{\varphi(x)-\psi(x)\}\,dx.$$

Questo risultato si può ottenere in un modo molto semplice come si è mostrato nell'ultima parte dell'articolo precedente, sicchè non era assolutamente *necessario* di introdurre la formola di doppia integrazione. Nondimeno abbiamo richiamata l'attenzione sulla formola

$$A=\int_c^h\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dx\,dy$$

a motivo dell'illustrazione che si è qui data del procedimento di doppia integrazione; lo studente può così trovare più facile l'applicare il procedimento di doppia integrazione a quei casi in cui è assolutamente necessario, dei quali si avranno esempii in appresso.

139. Se l'area che si deve valutare è limitata dalle curve $x=\psi(y)$, ed $x=\varphi(y)$, e da linee rette parallele all'asse delle x alle distanze eguali rispettivamente a c ed h, abbiamo in modo simile

$$A=\int_c^h\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} dy\, dx=\int_c^h \{\varphi(y)-\psi(y)\}\, dy.$$

Alcuni esempii delle formole degli Art. 137 e 139 saranno ora considerati; vedremo che ciascuna di queste formole si può usare in un esempio, benchè generalmente l'una sarà più semplice dell'altra.

140. Si voglia l'area racchiusa tra la parabola $y^2=ax$ ed il circolo $y^2=2ax-x^2$.

Le curve passano per l'origine e s'incontrano nel punto pel quale $x=a$; così se prendiamo solamente l'area che sta dalla parte positiva dell'asse delle x, abbiamo

$$A=\int_0^a \{\sqrt{(2ax-x^2)}-\sqrt{(ax)}\}\, dx=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2a^2}{3}.$$

L'intera area sarà perciò $2\left(\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2a^2}{3}\right)$.

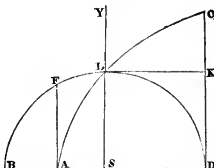
Supponiamo che in questo esempio si voglia integrare prima rispetto ad x. Dall'equazione $y^2=2ax-x^2$ deduciamo $x=a\pm\sqrt{(a^2-y^2)}$, e si vedrà immediatamente da una figura che nella presente quistione dobbiamo prendere il segno inferiore. Così posto x_1 per $a-\sqrt{(a^2-y^2)}$, ed x_2 per $\frac{y^2}{a}$, verrà

$$A=\int_0^a\int_{x_1}^{x_2} dy\, dx=\int_0^a\left\{\frac{y^2}{a}-a+\sqrt{(a^2-y^2)}\right\} dy$$

$$=\frac{a^2}{3}-a^2+\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2a^2}{3}, \text{ come prima.}$$

Il lettore dovrebbe tracciare le figure e porre attenzione ai *limiti* delle integrazioni.

141. Nella figura seguente S è il centro di un circolo BLD, S è anche il fuoco di una parabola ALC; indicheremo le



integrazioni che dovrebbero effettuarsi per ottenere le aree ALB ed LDC. Questo esempio si è messo con lo scopo di illustrare il procedimento di doppia integrazione, e non per alcun interesse nei risultati: le aree si possono ottenere facilmente per mezzo delle formole già date; così ALB è la differenza tra l'area parabolica ALS ed il quadrante SLB; e similmente LDC è conosciuta.

Si prenda S per origine. Nel trovare l'area ALB sarà conveniente supporre che la direzione positiva dell'asse delle x sia verso sinistra; così se $4a$ è il lato retto della parabola, e per conseguenza $2a$ il raggio del circolo, l'equazione della parabola è $y^2=4a(a-x)$, e quella del circolo $y^2=4a^2-x^2$.

Supponiamo che s'integri prima rispetto ad x, allora

$$\text{area } ALB = \int_0^{2a}\int_{x_1}^{x_2} dy\, dx,$$

in cui $$x_1 = a - \frac{y^2}{4a}, \quad x_2 = \sqrt{(4a^2 - y^2)}.$$

Poichè qui $(x_2 - x_1)\Delta y$ rappresenta una striscia racchiusa tra le due curve e due linee parallele all'asse delle x; e le

striscie sono situate a distanze dall'asse delle x disposte tra 0 e $2a$, sicchè l'integrazione rispetto ad y è presa tra i limiti 0 e $2a$.

Supponiamo che s'integri prima rispetto ad y; dovremo allora dividere l'area in due parti con la linea AF. Sia

$$y_1 = \sqrt{(4a^2 - 4ax)}, \qquad y_2 = \sqrt{(4a^2 - x^2)};$$

allora $$\text{area } ALF = \int_0^a \int_{y_1}^{y_2} dx\, dy = \int_0^a (y_2 - y_1)\, dx;$$

$$\text{area } AFB = \int_0^{2a} \int_0^{y_2} dx\, dy = \int_0^{2a} y_2\, dx;$$

la somma di queste due parti esprime l'area ALB.

Prendiamo in secondo luogo l'area LDC; supponiamo ora che la direzione positiva dell'asse delle x sia verso dritta, allora l'equazione della parabola è $y^2 = 4a(a+x)$, e quella del circolo $y^2 = 4a^2 - x^2$.

Supponiamo che s'integri prima rispetto ad y; sia

$$y_1 = \sqrt{(4a^2 - x^2)} \text{ ed } y_2 = \sqrt{(4a^2 + 4ax)};$$

allora $$\text{area } DLC = \int_0^{2a} \int_{y_1}^{y_2} dx\, dy.$$

Supponiamo che s'integri prima rispetto ad x; dovremo allora dividere l'area in due parti con la linea LK. Sia

$$x_1 = \sqrt{(4a^2 - y^2)}, \quad x_2 = \frac{y^2}{4a} - a;$$

allora troveremo che $DC = 2a\sqrt{3} = b$ poniamo; così

$$\text{area } DLK = \int_0^{2a} \int_{x_1}^{2a} dy\, dx,$$

$$\text{area } CLK = \int_{2a}^{b} \int_{x_2}^{2a} dy\, dx;$$

la somma di queste due parti esprime l'area LDC.

142. Un caso nel quale sono utili le formole degli Art. 137 e 139 è quello in cui le curve limiti sono diversi rami di una stessa curva. Supponiamo che l'equazione di una curva sia $(y - mx - c)^2 = a^2 - x^2$; così

$$y = mx + c \pm \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Quì possiamo porre

$$\psi(x) = mx + c - \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

$$\varphi(x) = mx + c + \sqrt{(a^2 - x^2)};$$

così $\varphi(x) - \psi(x) = 2\sqrt{(a^2 - x^2)}$, e l'area completa della curva è

$$\int_{-a}^{a} 2\sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx, \text{ cioè, } \pi a^2.$$

143. Abbiamo sinora supposto gli assi rettangolari, ma se essi sono obbliqui ed inclinati sotto un angolo ω, la formola nell'Art. 128 diviene

$$A = \operatorname{sen}\omega \int \varphi(x)\, dx,$$

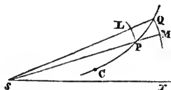
ed un simile cambiamento si fa in tutte le altre formole. È chiaro che quegli elementi dell'area che sono dinotati da $y\Delta x$ e $\Delta y\,\Delta x$ quando gli assi sono rettangolari saranno dinotati da $\operatorname{sen}\omega\, y\Delta x$ e $\operatorname{sen}\omega\, \Delta y\,\Delta x$ quando gli assi sono inclinati sotto un angolo ω.

Per esempio, l'equazione della parabola è $y^2 = 4a'x$ quando gli assi sono il sistema obbliquo formato da un diametro e dalla tangente nella sua estremità; quindi l'area racchiusa tra la curva, l'asse delle x, ed un'ordinata al punto pel quale $x = c$, è

$$\operatorname{sen}\omega \int_0^c \sqrt{(4a'x)}\, dx = \frac{4 \operatorname{sen}\omega \sqrt{a'}c^{\frac{3}{2}}}{3};$$

cioè, i due terzi del parallelogrammo che ha l'ascissa c e l'ordinata nella sua estremità per lati adiacenti.

Aree piane. Formole polari. Semplice integrazione.



144. Sia CPQ una curva, di cui l'equazione polare è $r = \varphi(\theta)$, e supponiamo che r, θ siano le coordinate di un punto P. Dinoti A l'area racchiusa tra la curva, il raggio vettore SC condotto ad un punto fisso C, ed il raggio vettore SP, allora (*Cal. Dif.* Art. 313)

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{\{\varphi(\theta)\}^2}{2}.$$

Onde
$$A = \frac{1}{2}\int \{\varphi(\theta)\}^2 d\theta.$$

Sia $\psi(\theta)$ l'integrale di $\frac{\{\varphi(\theta)\}^2}{2}$, allora

$$A = \psi(\theta) + C.$$

Dinoti A_1 l'area quando il raggio vettore variabile è ad una distanza angolare θ_1 dalla linea iniziale, e dinoti A_2 l'area quando il raggio vettore variabile è ad una distanza angolare θ_2 dalla linea iniziale; allora

$$A_1 = \psi(\theta_1) + C, \qquad A_2 = \psi(\theta_2) + C,$$

quindi
$$A_2 - A_1 = \psi(\theta_2) - \psi(\theta_1) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\varphi(\theta)\}^2 d\theta.$$

145. *Applicazione alla Spirale Equiangola.*

In questa curva $r = be^{\frac{\theta}{c}}$; così

$$A = \frac{1}{2}\int b^2 e^{\frac{2\theta}{c}} d\theta = \frac{b^2 c}{4} e^{\frac{2\theta}{c}} + C,$$

ed $$A_2 - A_1 = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} b^2 e^{\frac{2\theta}{c}}\, d\theta = \frac{b^2 c}{4}\left(e^{\frac{2\theta_2}{c}} - e^{\frac{2\theta_1}{c}}\right) = \frac{c}{4}\left(r_2^2 - r_1^2\right),$$

in cui r_1 ed r_2 sono i raggi vettori estremi dell'area che si considera.

146. *Applicazione alla Parabola.*

Sia il fuoco il polo, allora

$$r = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}}; \text{ così } A = \frac{a^2}{2}\int \frac{d\theta}{\cos^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)\sec^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = a^2 \tan\frac{\theta}{2} + \frac{a^2}{3}\tan^3\frac{\theta}{2} + C.$$

Quindi $A_2 - A_1 = a^2\left(\tan\frac{\theta_2}{2} - \tan\frac{\theta_1}{2}\right) + \frac{a^2}{3}\left(\tan^3\frac{\theta_2}{2} - \tan^3\frac{\theta_1}{2}\right)$.

Supponiamo che sia $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, allora otteniamo per l'area $a^2 + \frac{a^2}{3}$, cioè, $\frac{4a^2}{3}$; ciò è d'accordo con l'Art. 131.

Per un altro esempio supporremo la parabola riferita all'intersezione della direttrice e dell'asse come polo, l'asse essendo la linea iniziale. Qui

$$r = 2a\,\frac{\cos\theta - \sqrt{(\cos 2\theta)}}{\operatorname{sen}^2\theta},$$

così $$A = 2a^2\int \frac{\cos^2\theta + \cos 2\theta - 2\cos\theta\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta$$

$$= 2a^2\int \frac{2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta - 4a^2\int \frac{\cos\theta\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta.$$

Ora $$\int \frac{2\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}^4\theta}\,d\theta = \int (2\cot^2\theta - 1)\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta$$
$$= -\frac{2}{3}\cot^3\theta + \cot\theta.$$

Ed $$\int \frac{\cos\theta\,\sqrt{(\cot 2\theta)}\,d\theta}{\text{sen}^4\theta} = \int \frac{\sqrt{(1 - 2\,\text{sen}^2\theta)}\,d\,\text{sen}\,\theta}{\text{sen}^4\theta};$$

si ponga $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{t}$, allora l'integrale diviene
$$-\int \sqrt{(t^2-2)}\,t\,dt, \text{ cioè, } -\frac{1}{3}(t^2-2)^{\frac{3}{2}}.$$

Quindi, aggiungendo la costante, abbiamo
$$A = \frac{4a^2}{3}(\operatorname{cosec}^2\theta - 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4a^2}{3}\cot^3\theta + 2a^2\cot\theta + C.$$
$$= 2a^2\cot\theta + \frac{4a^2}{3}\,\frac{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} - \cos^3\theta}{\text{sen}^3\theta} + C.$$

La costante sarà zero se A incomincia dalla linea iniziale; poichè si troverà facendone ricerca che
$$2\cot\theta + \frac{4}{3}\,\frac{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} - \cos^3\theta}{\text{sen}^3\theta} \text{ svanisce quando } \theta = 0.$$

147. *Applicazione alla curva* $r = a(\theta + \text{sen}\,\theta)$. Qui
$$A = \frac{a^2}{2}\int (\theta + \text{sen}\,\theta)^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int (\theta^2 + 2\theta\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}^2\theta)\,d\theta;$$

ed $$\int \theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = -\theta\cos\theta + \text{sen}\,\theta$$
$$\int \text{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4},$$

così $$A = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{\theta^3}{3} - 2\theta\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right\} + C.$$

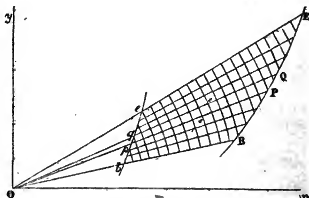
Supponiamo che si voglia l'area della più piccola porzione che è limitata dalla curva e da un raggio vettore inclinato

alla linea iniziale per un angolo retto; allora abbiamo 0 ed $\frac{1}{2}\pi$ come limiti dell'integrazione. Così l'area richiesta è

$$\frac{a^2}{2}\left\{\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{4}+2\right\}.$$

Curve piane. Formole polari. Doppia Integrazione.

148. Nell'Art. 144 abbiamo ottenuto una formola per trovare l'area di una curva; quella formola suppone che l'area sia il limite di più aree elementari, ciascun elemento essendo una quantità di cui $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ è il tipo. Procediamo ora a spiegare un altro modo di decomporre l'area richiesta in aree elementari.



Supponiamo che si voglia l'area racchiusa tra le curve $BPQE$ e $bpqe$, e le linee rette Bb ed Ee. Si conduca una serie di raggi vettori da O, ed una serie di circoli col centro in O; così l'area piana è divisa in una serie di quadrilateri curvilinei. Rappresenti st uno di questi elementi, e supponiamo che r e θ siano le coordinate polari di s, ed $r+\Delta r$ e $\theta+\Delta\theta$ le coordinate polari di t; allora l'area dell'elemento st sarà ultimamente $r\Delta\theta\,\Delta r$. Quindi l'area richiesta si deve trovare sommando tutt'i valori di $r\Delta\theta\,\Delta r$, e poi procedendo al limite ottenuto supponendo che $\Delta\theta$ e Δr diminuiscano indefinitamente.

Si ottiene la richiesta sommazione di termini come $r\Delta\theta\,\Delta r$ nel modo seguente: prima riuniamo tutti gli elementi simili ad st che sono contenuti nella striscia $PQqp$, e così otteniamo l'area della striscia; poi sommiamo tutte le strisce simili a questa striscia che giacciono tra Bb ed Ee.

Sia $r = \varphi(\theta)$ l'equazione della curva $BPQE$ ed $r = \psi(\theta)$ l'equazione della curva $bpqe$, siano α e β gli angoli che OB ed OE fanno rispettivamente con Ox; e dinoti A l'area richiesta, allora

$$A = \int_\alpha^\beta \int_{\psi(\theta)}^{\varphi(\theta)} r d\theta\, dr;$$

poichè l'espressione simbolica quì data dinota il procedimento che abbiamo poco prima stabilito in parole.

Ora $\int r dr = \frac{r^2}{2}$, quindi

$$\int_{\psi(\theta)}^{\varphi(\theta)} r dr = \frac{1}{2} [\{\varphi(\theta)\}^2 - \{\psi(\theta)\}^2],$$

così abbiamo

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\{\varphi(\theta)\}^2 - \{\psi(\theta)\}^2]\, d\theta.$$

In questa forma possiamo vedere immediatamente la verità dell'espressione, poichè $OP = \varphi(\theta)$ ed $Op = \psi(\theta)$, e così

$$\frac{1}{2}\{\varphi(\theta)\}^2\Delta\theta - \frac{1}{2}\{\psi(\theta)\}^2\Delta\theta$$

si può prendere per l'area della striscia $PQqp$, e la formola asserisce che l'area A è eguale al limite della somma di tali strisce.

149. L'osservazione fatta nell'Art. 138 si può ripetere quì; si è introdotto il procedimento nella prima parte dell'articolo precedente, non perchè la doppia integrazione sia assolutamente necessaria per trovare l'area di una curva, ma perchè il procedimento per trovare l'area di una curva chiarisce la doppia integrazione.

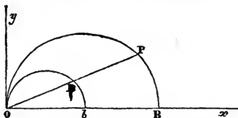
150. Se l'area che deve valutarsi è limitata dalle curve di cui le equazioni sono $\theta = \varphi(r)$, $\theta = \psi(r)$ rispettivamente,

e dai circoli di cui le equazioni sono $r=a$ ed $r=b$ rispettivamente, sarà conveniente d'integrare prima rispetto a θ. In questo caso, invece di sommare prima tutti gli elementi come st, che formano la striscia $PQqp$, sommiamo prima tutti gli elementi simili ad st che sono racchiusi tra i due circoli che limitano st e le curve determinate da $\theta=\varphi(r)$ e $\theta=\psi(r)$. Così abbiamo

$$A=\int_a^b\int_{\psi(r)}^{\varphi(r)} r dr\, d\theta.$$

Alcuni esempii delle formole negli Art. 148 e 150 saranno ora considerati; vedremo che ciascuna di queste formole può essere usata in un esempio, benchè l'una possa essere più conveniente dell'altra.

151. Applicheremo le formole per trovare l'area tra i due semicircoli OPB ed Opb e la linea retta bB.



Sia $Ob=c$, $OB=h$, allora l'equazione di OPB è $r=h\cos\theta$, e l'equazione di Opb è $r=c\cos\theta$. Così l'area

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{c\cos\theta}^{h\cos\theta} r d\theta\, dr.$$

Ora $$\int_{c\cos\theta}^{h\cos\theta} r dr=\frac{1}{2}(h^2-c^2)\cos^2\theta;$$

così $$\text{l'area}=\frac{1}{2}(h^2-c^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{8}(h^2-c^2).$$

Supponiamo che si voglia integrare prima rispetto a θ; dovremo allora dividere l'area in due parti descrivendo un arco di circolo da O come centro, col raggio Ob. Allora l'area

limitata da quest'arco, la linea retta Bb, ed il semicircolo maggiore è

$$\int_c^h \int_0^{\cos^{-1}\frac{r}{h}} r dr\, d\theta.$$

L'area limitata dal suddetto arco, il semicircolo Opb, ed il semicircolo maggiore è

$$\int_0^c \int_{\cos^{-1}\frac{r}{c}}^{\cos^{-1}\frac{r}{h}} r dr\, d\theta.$$

La somma di queste due parti esprime l'area richiesta.

152. Applichiamo le formole polari all'esempio nell'Art. 141. Con S come polo, l'equazione polare della parabola è $r(1+\cos\theta)=2a$ o $r\cos^2\frac{\theta}{2}=a$, in cui θ è misurato da SB; e l'equazione polare del circolo è $r=2a$. Quindi, se integriamo prima rispetto ad r,

$$\text{area } ALB=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\sec^2\frac{\theta}{2}}^{2a} r d\theta\, dr.$$

Se integriamo prima rispetto a θ, avremo se $\theta_1=\cos^{-1}\frac{2a-r}{r}$

$$\text{area } ALB=\int_a^{2a}\int_0^{\theta_1} r dr\, d\theta.$$

In seguito consideriamo l'area DLC. L'equazione di DC è $r\cos\theta=-2a$; la lunghezza di SC è $4a$, e l'angolo BSC è $\frac{2\pi}{3}$. Sia $\theta_1=\cos^{-1}\frac{2a-r}{r}$, $\theta_2=\cos^{-1}\left(\frac{-2a}{r}\right)$. Allora se integriamo prima rispetto a θ,

$$\text{area } DLC=\int_{2a}^{4a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r dr\, d\theta.$$

Se integriamo prima rispetto ad r, dovremo dividere l'area in due parti, per mezzo della linea che congiunge S

con C. L'area della porzione che ha LC per uno dei suoi contorni è

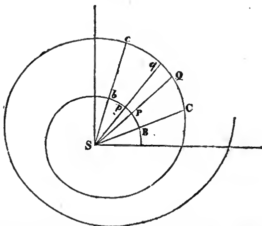
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{2a}^{a \sec^2 \frac{\theta}{2}} r d\theta \, dr.$$

L'area della rimanente porzione è

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \int_{2a}^{-2a \sec \theta} r d\theta \, dr.$$

La somma di queste due parti esprime l'area richiesta.

153. Un buon esempio è fornito dal problema di trovare l'area racchiusa tra due raggi vettori e due rami diversi della stessa curva polare.



Supponiamo che $BPpb$, $CQqc$ siano due differenti archi di una spirale, e che debba valutarsi l'area limitata da questi archi e dalle linee rette BC e bc; allora l'area è

$$\frac{1}{2} \int (r_2^2 - r_1^2) \, d\theta;$$

in cui r_2 dinota un raggio vettore qualunque dell'arco esteriore, come SQ, ed r_1 il corrispondente raggio vettore SP dell'arco interiore. I limiti di θ saranno dati dagli angoli che SB od Sb rispettivamente fanno con la linea iniziale.

Si prenda per esempio la spirale di Archimede; sia θ l'intero angolo che il raggio vettore ha percorso a partire dalla linea iniziale finchè prenda la posizione SP; sicchè θ può essere un angolo di ogni grandezza. Per la natura della curva abbiamo SP o $r = a\theta$, in cui a è una costante. Se dunque CQ è il ramo seguente a BP avremo

$$SQ = a(\theta + 2\pi).$$

Siano θ_1 e θ_2 i valori di θ per SB ed Sb rispettivamente; così l'area $BbcC$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{(\theta + 2\pi)^2 - \theta^2\}\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\{2\pi(\theta_2^2 - \theta_1^2) + 4\pi^2(\theta_2 - \theta_1)\}.$$

154. Lo studente osserverà una certa differenza tra le formole $\iint dx\,dy$ ed $\iint r d\theta\, dr$, che esprimono l'area di una figura piana. La prima suppone l'area decomposta in più rettangoli e $\Delta x\,\Delta y$ rappresenta la vera area di un rettangolo. Quindi nel prendere l'aggregato di questi rettangoli onde rappresentare l'area richiesta il solo errore che può nascere è dovuto al trascurarsi degli elementi irregolari situati nella parte superiore e nella inferiore di ciascuna striscia; come abbiamo già osservato nell'Art. 137. Ma nel secondo caso $r\Delta\theta\,\Delta r$ non è il *valore esatto* dell'area di uno degli elementi, sicchè si commette un errore nel caso di ogni elemento. È perciò importante di mostrare formalmente che l'errore sparisce nel limite, il che può farsi come segue. L'elemento st nella figura dell'Art. 148 è la differenza di due settori circolari, e la sua area esatta è

$$\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta,$$

cioè
$$r\Delta r\,\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta.$$

Prendendo il primo termine per rappresentare l'area trascuriamo $\frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\theta$. Quindi il rapporto del termine trascurato al termine ritenuto

$$= \frac{\frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\theta}{r \Delta r \, \Delta\theta} = \frac{\Delta r}{2r}.$$

Prendendo Δr sufficientemente piccolo questo rapporto si può rendere tanto piccolo quanto ci piace. Quindi possiamo conchiudere che la somma dei termini trascurati svanirà ultimamente in paragone della somma dei termini ritenuti, cioè, ogni errore nel limite sparisce.

Altre formole Polari.

155. Sia s la lunghezza dell'arco di una curva misurato da un punto fisso sino al punto di cui le coordinate sono r e θ; sia p la perpendicolare dall'origine sulla tangente nell'ultimo punto; allora il seno dell'angolo tra questa tangente ed il corrispondente raggio vettore è $r\frac{d\theta}{ds}$ (*Cal. Dif.* Art. 310); inoltre $\frac{p}{r}$ è un'altra espressione per questo seno; quindi $r\frac{d\theta}{ds} = \frac{p}{r}$. Dinoti A l'area tra la curva e certi raggi vettori limiti; allora

$$A = \frac{1}{2}\int r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int r^2 \frac{d\theta}{ds} ds = \frac{1}{2}\int r\frac{p}{r} ds = \frac{1}{2}\int p ds;$$

i limiti di s nell'ultimo integrale debbono essere quelli che corrispondono ai raggi vettori limiti dell'area che si considera.

Il risultato si può illustrare geometricamente; supponiamo P, Q punti adiacenti su di una curva, S il polo, p' la perpendicolare da S sulla corda PQ; allora, l'area del triangolo PQS

$$= \frac{1}{2} p' \times \text{corda } PQ.$$

Supponiamo ora che Q si avvicini indefinitamente a P, allora $p' = p$, ed il limite del rapporto della corda PQ all'arco PQ è l'unità.

156. Poichè $\int pds = \int p \frac{ds}{dr} dr = \int \frac{pr\,dr}{\sqrt{(r^2 - p^2)}}$ (Art. 85),

abbiamo
$$A = \frac{1}{2}\int \frac{pr\,dr}{\sqrt{(r^2 - p^2)}}.$$

157. *Applicazione all' Epicicloide.*

Qui $p^2 = \frac{c^2(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}$; così

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{c\sqrt{(r^2 - a^2)}\,rdr}{a\sqrt{(c^2 - r^2)}} = \frac{c}{2a}\int \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}\,rdr}{\sqrt{\{c^2 - a^2 - (r^2 - a^2)\}}}$$

$$= \frac{c}{2a}\int \frac{z^2dz}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}} \text{ in cui } z^2 = r^2 - a^2.$$

Ora

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}} = \int \frac{z^2 - (c^2 - a^2)}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}}dz + (c^2 - a^2)\int \frac{dz}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}}$$

$$= (c^2 - a^2)\int \frac{dz}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}} - \int \sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}dz$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{z}{\sqrt{(c^2 - a^2)}} - \frac{z\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}}{2}$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{\sqrt{(c^2 - a^2)}} - \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}\sqrt{(c^2 - r^2)}}{2}.$$

Prendendo questo tra i limiti $r = a$ ed $r = c$, otteniamo $\frac{c^2 - a^2}{2}\frac{\pi}{2}$, cioè, $b(a + b)\pi$. Quindi l'area è $\frac{c}{2a}b(a+b)\pi$, cioè, $\frac{(a + 2b)\,b(a + b)\pi}{2a}$. Raddoppiando questo risultato otteniamo l'area tra la curva ed i raggi vettori condotti a due cuspidi consecutive, che è perciò $\frac{(a+2b)\,b\,(a+b)\,\pi}{a}$. L'area del settore circolare che forma parte di quest'area è πab; si sottragga quest'ultima ed otteniamo l'area tra un arco dell'epicicloide che si estende da una cuspide alla cuspide

seguente, ed il circolo fisso sul quale ruzzola il circolo generatore; il risultato è

$$\frac{\pi b^2}{a}(3a+2b).$$

158. Similmente si può trovare nell'ipocicloide l'area tra il circolo fisso e la parte della curva che si estende tra due cuspidi consecutive. Se a è maggiore di b il risultato è

$$\frac{\pi b^2}{a}(3a-2b).$$

Area tra una Curva e la sua Evoluta.

159. Nelle figure dell'Art. 114, se supponiamo il filo o la linea PQ muoversi per un piccolo angolo $\Delta\varphi$, la figura tra le due posizioni della linea e la curva AP si può considerare ultimamente come un settore di circolo; la sua area sarà perciò $\frac{1}{2}\rho^2\Delta\varphi$, in cui $\rho=PQ$. Così se A dinota l'intera area limitata dalla curva, la sua evoluta, e due raggi di curvatura corrispondenti ai valori φ_1 e φ_2 di φ, abbiamo

$$A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi.$$

Poichè $\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{\rho}$, possiamo ancora scrivere questo

$$A=\frac{1}{2}\int \rho\, ds,$$

i limiti di s essendo presi in modo da corrispondere ai noti limiti di φ.

160. *Applicazione alla Catenaria.*

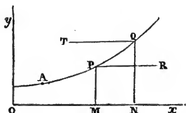
Qui $s=c\tan\varphi$, Art. 109;

onde $\rho=c\sec^2\varphi$, $A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}c^2\sec^4\varphi\, d\varphi$,

ed $$\int \sec^4 \varphi \, d\varphi = \tan \varphi + \frac{1}{3} \tan^3 \varphi + C;$$

così A è conosciuta.

Area delle Superficie di Rotazione. Formole rettangolari.



161. Sia A un punto fisso nella curva APQ; siano x, y le coordinate di un punto qualunque P, ed s la lunghezza dell'arco AP. Supponiamo che la curva giri intorno l'asse delle x, e dinoti S l'area della superficie generata dalla rotazione di AP; allora (*Cal. Dif.* Art. 315)

$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y;$$

onde $$S = \int 2\pi y \, ds \;............ (1);$$

così $$S = \int 2\pi y \frac{ds}{dx} dx \;.......... (2),$$

ed $$S = \int 2\pi y \frac{ds}{dy} dy \;.......... (3).$$

Di queste tre forme possiamo scegliere in ogni esempio particolare quella che è più conveniente. Se y si può esprimere facilmente in termini di s possiamo usare (1); se $\frac{ds}{dy}$ si può esprimere facilmente in termini di y possiamo usare (3); in alcuni casi può essere più conveniente di esprimere y e $\frac{ds}{dx}$ in termini di x ed usare (2).

In ciascun caso l'area della superficie generata dall'arco della curva compreso tra punti assegnati si troverà integrando tra limiti appropriati.

162. *Applicazione al Cilindro.*

Supponiamo che una linea retta parallela all'asse delle x giri intorno all'asse delle x, generando così un cilindro retto circolare; sia a la distanza della linea che gira dall'asse delle x; allora

$$y = a, \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dx} = 1;$$

così per l'equazione (2) dell'Art. 161,

$$S = 2\pi \int a dx = 2\pi a x + C.$$

Supponiamo che le ascisse dei punti estremi della porzione della linea che gira siano x_1 ed x_2; allora la superficie generata

$$= 2\pi a \int_{x_1}^{x_2} dx = 2\pi a (x_2 - x_1).$$

163. *Applicazione al Cono.*

Una linea retta che passa per l'origine ed è inclinata all'asse delle x sotto un angolo α giri intorno l'asse delle x, e generi così una superficie conica. Allora

$$y = x \tan \alpha, \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dx} = \sec \alpha;$$

così per l'equazione (2) dell'Art. 161,

$$S = 2\pi \int \tan \alpha \sec \alpha \, x dx = \pi \tan \alpha \sec \alpha \, x^2 + C.$$

Quindi la superficie del tronco di cono tagliato da piani perpendicolari al suo asse alle distanze x_1, x_2 rispettivamente dal vertice è

$$\pi \tan \alpha \sec \alpha \, (x_2^2 - x_1^2).$$

Si supponga $x_1 = 0$, e sia r il raggio della sezione fatta dal piano alla distanza x_2, allora $r = x_2 \tan\alpha$, e l'area è

$$\pi \operatorname{cosec}\alpha\, r^2.$$

164. *Applicazione alla Sfera.*

Il circolo dato dall'equazione $y^2 = a^2 - x^2$ giri intorno l'asse delle x; quì

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

e
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{a}{y}.$$

Quindi per l'equazione (2) dell'Art. 161,

$$S = 2\pi \int y \frac{a}{y}\, dx = 2\pi a \int dx = 2\pi a x + C.$$

Così la superficie racchiusa tra i piani determinati da

$$x = x_1 \text{ ed } x = x_2 \text{ è } 2\pi a (x_2 - x_1).$$

Quindi l'area di una zona sferica dipende solamente dall'*altezza* della zona e dal *raggio* della sfera, ed è eguale all'area che i piani che la terminano taglierebbero da un cilindro col suo asse perpendicolare a quei piani e circoscritto alla sfera; e così la superficie della sfera intera è $4\pi a^2$. Questi risultati sono molto importanti.

165. *Applicazione allo Sferoide allungato.*

L'ellisse data da $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ giri intorno l'asse delle x che si suppone coincidere con l'asse maggiore dell'ellisse; quì

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

e
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)} = \frac{b\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}}{ay}.$$

Quindi per l'equazione (2) dell'Art. 161,

$$S = \frac{2\pi b}{a} \int \sqrt{(a^2 - e^2x^2)}\, dx = \frac{2\pi b e}{a} \int \sqrt{\left(\frac{a^2}{e^2} - x^2\right)}\, dx$$

$$= \frac{\pi b e}{a} \left\{ x \sqrt{\left(\frac{a^2}{e^2} - x^2\right)} + \frac{a^2}{e^2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{ex}{a} \right\}.$$

La superficie generata dalla rotazione di un quadrante dell'ellisse si otterrà prendendo 0 ed a come limiti di x nell'integrazione. Ciò dà

$$\pi ab \left\{ \sqrt{(1-e^2)} + \frac{\operatorname{sen}^{-1} e}{e} \right\}.$$

166. Supponiamo che una curva abbia per sua equazione $y=\varphi(x)$, ed un'altra curva abbia per sua equazione $y=\psi(x)$, e tutte e due le curve girino intorno l'asse delle x. Dinotino s_1 ed s_2 le lunghezze degli archi misurati da punti fissi nelle due curve sino al punto che ha per ascissa x. Dinoti S la *somma* delle aree delle due superficie comprese tra due piani perpendicolari all'asse delle x alle distanze x_1 ed x_2 rispettivamente dall'origine. Allora, per l'Art. 161,

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \varphi(x) \frac{ds_1}{dx} + \psi(x) \frac{ds_2}{dx} \right\} dx.$$

Supponiamo, per esempio, che si abbia una curva divisa per metà dalla linea $y=a$, sicchè possiamo porre $y=a+\chi(x)$ pel ramo superiore ed $y=a-\chi(x)$ pel ramo inferiore. Quindi

$$\frac{ds_1}{dx} = \frac{ds_2}{dx},$$

ed
$$S = 4\pi a \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds_1}{dx}\, dx = 4\pi a \int ds_1,$$

i limiti di s_1 essendo presi in modo da corrispondere con i limiti assegnati di x.

Quindi, se si ha una curva completa che è bisegata da una linea retta e si fa girare intorno un asse parallelo a questa linea e ad una distanza a da essa e che non taglia la curva, l'area dell'intera superficie generata è eguale alla lunghezza della curva moltiplicata per $2\pi a$.

167. Per esempio, si prenda il circolo dato dall'equazione

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 - c^2 = 0.$$

Quì l'area dell'intera superficie generata dalla rotazione del circolo intorno l'asse delle x sarà $2\pi k \times 2\pi c$.

Non vi è difficoltà in questo esempio per ottenere separatamente le due porzioni della superficie. Per la parte al di sopra della linea $y=k$, abbiamo $2\pi\int yds$, cioè,

$$2\pi\int [k + \sqrt{\{c^2 - (x-h)^2\}}]\, ds,$$

cioè, $$2\pi\int kds + 2\pi\int \sqrt{\{c^2 - (x-h)^2\}}\, ds.$$

Il primo di questi integrali è $2\pi ks$; l'altro è eguale a

$$2\pi\int \sqrt{\{c^2 - (x-h)^2\}}\, \frac{ds}{dx}\, dx,$$

che si ridurrà a $2\pi\int cdx$, cioè, $2\pi cx$. Quindi la superficie richiesta si trova prendendo l'espressione $2\pi ks + 2\pi cx$ tra limiti convenienti.

Area delle superficie di rotazione. Formole polari.

168. Alle volte può essere conveniente di usare coordinate polari; così dall'Art. 161 deduciamo

$$S = \int 2\pi y ds = \int 2\pi y \frac{ds}{d\theta}\, d\theta = \int 2\pi r \operatorname{sen}\theta \frac{ds}{d\theta}\, d\theta,$$

in cui $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}.$$

169. *Applicazione alla Cardioide.*

Qui $r = a(1+\cos\theta)$; così

$$\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{\{(1+\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\}} = a\sqrt{(2+2\cos\theta)} = 2a\cos\frac{\theta}{2};$$

onde

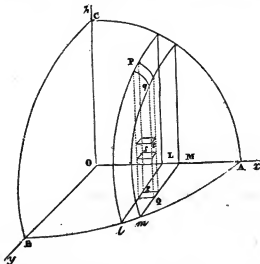
$$S = 4\pi a^2\int (1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\theta d\theta = 16\pi a^2\int \cos^4\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= -\frac{32\pi a^2}{5}\cos^5\frac{\theta}{2} + C.$$

La superficie generata dalla rotazione dell'intera curva intorno alla linea iniziale si otterrà prendendo 0 e π come limiti di θ nell'integrale. Ciò dà $\frac{32\pi a^2}{5}$.

Superficie qualunque. Doppia integrazione.

170. Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque p di una superficie; $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ le coordinate di



un punto adiacente q. Per p si conduca un piano parallelo a quello delle (x, z), ed un piano parallelo a quello delle (y, z); ancora per q si conduca un piano parallelo a quello delle (x, z) ed un piano parallelo a quello delle (y, z). Questi piani intercetteranno un elemento pq della superficie curva, e la proiezione di questo elemento sul piano delle (x, y) sarà il rettangolo PQ. Supponiamo che il piano tangente della superficie in p sia inclinato al piano delle (x, y) sotto un angolo γ, allora si conosce per la geometria solida che

$$\sec\gamma = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}},$$

in cui $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ debbono trovarsi dalla nota equazione della

superficie. Ora l'area di PQ è $\Delta x \, \Delta y$, quindi per la geometria solida l'area dell'elemento del piano tangente in p di cui PQ è la proiezione è $\Delta x \, \Delta y \sec\gamma$. Ammetteremo che il limite della somma dei termini come $\Delta x \Delta y \sec\gamma$ per tutt'i valori di x ed y compresi tra limiti assegnati sia l'area della superficie corrispondente a questi limiti. Dinoti allora S questa superficie; così

$$S = \iint \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}} \, dx \, dy,$$

i limiti delle integrazioni essendo dipendenti dalla porzione della superficie considerata.

171. Rispetto al punto ammesso nell'articolo precedente, il lettore si riferisca alle osservazioni sopra un simile punto nel *Cal. Dif.* Art. 308. Egli può anche consultare il *Differential and Integral Calculus* di De Morgan, pag. 444, e l'*Integral Calculus* di Homersham Cox, pag. 96.

172. *Applicazione alla Sfera.*

Si voglia trovare l'area dell'ottava parte della superficie della sfera data dall'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Quì $$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z};$$

così $$S = \iint \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)} \, dx \, dy = \iint \frac{a \, dx \, dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}.$$

Ora nella figura supponiamo $OL = x$; si ponga y_1 per Ll, allora $y_1 = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, poichè il valore di y_1 si ottiene dall'equazione della superficie supponendo $z = 0$. Se integriamo rispetto ad y tra i limiti 0 ed y_1, sommiamo tutti gli elementi compresi in una striscia di cui $LMml$ è la proiezione sul piano delle (x, y). Ora

$$\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}} = \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(y_1^2 - y^2)}} = \frac{\pi}{2};$$

così $$S = \frac{\pi a}{2} \int dx.$$

Se integriamo rispetto ad x da 0 ad a, sommiamo tutte le strisce comprese nella superficie di cui OAB è la proiezione. Così $\frac{\pi a^2}{2}$ è il risultato richiesto; e perciò l'intera superficie della sfera è $4\pi a^2$.

Se integriamo prima rispetto ad x, avremo

$$S = \int_0^a \int_0^{x_1} \frac{a\,dy\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}},$$

in cui $x_1 = \sqrt{(a^2 - y^2)}$.

173. Come altro esempio si voglia trovare l'area di quella parte della superficie data dall'equazione

$$z^2 + (x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)^2 - a^2 = 0,$$

che è situata nella regione positiva delle coordinate. Questa superficie è un cilindro retto circolare, avendo per suo asse la linea determinata da $z = 0$, $x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = 0$, ed a è il raggio di una sua sezione circolare. Quì

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\cos\alpha\,(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)}{z},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha\,(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)}{z},$$

così $$S = \iint \frac{a\,dx\,dy}{z} = \iint \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{\{a^2 - (x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)^2\}}}.$$

Il piano coordinato delle (x, y) sega la superficie secondo le linee rette $a = \pm (x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)$, e se si prende il segno superiore, abbiamo una linea situata nel quadrante positivo del piano delle (x, y).

Per ottenere il valore di S integriamo prima rispetto ad y tra i limiti $y = 0$ ed $y = (a - x\cos\alpha)\operatorname{cosec}\alpha$; ora

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{a^2 - (x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)^2\}}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha}{a};$$

si prenda questo tra i limiti assegnati, ed otteniamo

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{x\cos\alpha}{a}\right);$$

onde
$$S=\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\int\left\{\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{x\cos\alpha}{a}\right\}dx,$$

ed i limiti dell'integrazione sono 0 ed $\frac{a}{\cos\alpha}$. Quindi troveremo

$$S=\frac{a^2}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}.$$

174. Invece di prendere l'elemento del piano tangente in un punto di una superficie, in modo che la sua proiezione sia il rettangolo $\Delta x\,\Delta y$, può essere in alcuni casi più conveniente di prenderlo in modo che la sua proiezione sia l'elemento polare $r\Delta\theta\,\Delta r$. Così avremo

$$S=\iint\sec\gamma\, r d\theta\, dr.$$

Per esempio, supponiamo che si voglia l'area della superficie $xy=az$, che è tagliata dalla superficie $x^2+y^2=c^2$; quì

$$\sec\gamma=\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)}=\frac{\sqrt{(a^2+r^2)}}{a},\ \text{poichè}\ x^2+y^2=r^2.$$

Così
$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^c\frac{\sqrt{(a^2+r^2)}}{a}r d\theta\, dr=\frac{2\pi}{3a}\{(c^2+a^2)^{\frac{3}{2}}-a^3\}.$$

175. Supponiamo $x=r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z=r\cos\theta$, sicchè r, θ, φ sono le ordinarie coordinate polari di un punto nello spazio; allora vedremo in appresso che l'equazione

$$S=\iint\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}dx\, dy$$

si può trasformare in

$$S=\iint\sqrt{\left\{r^2\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}}r d\theta\, d\varphi.$$

Una indipendente dimostrazione geometrica si troverà nel *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. IX, ed anche nel *Treatise on the Calculus of Operations* di Carmichael. Converrà ricordarsi che in questa formola $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, mentre nell'Art. 174 dinotiamo $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ con r.

Valori approssimati degl' Integrali.

176. Supponiamo y una funzione di x, e che si voglia $\int_a^c y dx$. Se l'integrale *indefinito* $\int y dx$ è conosciuto possiamo immediatamente avere il richiesto integrale definito. Se l'integrale indefinito è ignoto, possiamo ancora determinare approssimativamente il valore dell'integrale definito. Questo procedimento di approssimazione è meglio illustrato supponendo che y sia un'ordinata di una curva sicchè $\int_a^c y dx$ rappresenti una certa area. Si divida $c - a$ in n parti ciascuna eguale ad h e si tirino $n - 1$ ordinate ad eguali distanze tra l'ordinata iniziale e la finale; allora le ordinate si possono dinotare con $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n, y_{n+1}$. Quindi possiamo prendere

$$h\,(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n)$$

come un valore approssimato dell'area richiesta. O pure possiamo prendere

$$h\,(y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{n+1})$$

come un valore approssimato.

Possiamo ottenere un'altra approssimazione così; supponiamo congiunte le estremità delle ordinate r^{ma} ed $(r+1)^{\text{ma}}$; così abbiamo un trapezio, l'area del quale è $(y_r + y_{r+1})\,\frac{h}{2}$. La somma di tutti questi trapezii dà come un valore approssimato dell'area

$$h\left\{\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 \ldots\ldots + y_n + \frac{y_{n+1}}{2}\right\}.$$

Questo risultato è infatti la semisomma dei due primi risultati. È chiaro che possiamo prendere l'approssimazione tanto vicina quanto ci piace crescendo sufficientemente n.

177. Il seguente è un altro metodo di approssimazione. Sia descritta una parabola con l'asse parallelo a quello delle y; rappresentino y_1, y_2, y_3 tre ordinate equidistanti, h la distanza tra y_1 ed y_2, e quindi anche tra y_2 ed y_3. Allora si può dimostrare che l'area contenuta tra la parabola, l'asse delle x, e le due ordinate estreme è

$$\frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Questo si mostrerà facilmente con una figura, essendo formata l'area da un trapezio e da un segmento parabolico, e l'area di quest'ultimo è conosciuta per l'Art. 143.

Supponiamo ora che n sia pari, sicchè l'area da valutare sia divisa in un numero pari di parti. Allora si supponga che l'area delle prime due parti sia

$$\frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3),$$

che l'area della terza e della quarta parte sia

$$\frac{h}{3}(y_3 + 4y_4 + y_5),$$

e così di seguito. Così avremo finalmente come risultato approssimato

$$\frac{h}{3}\{y_1 + 2(y_3 + y_5 + \ldots\ldots y_{n-1}) + y_{n+1} + 4(y_2 + y_4 \ldots\ldots + y_n)\}.$$

Quindi abbiamo la seguente regola: si uniscano insieme la prima ordinata, l'ultima ordinata, due volte la somma di tutte le altre ordinate dispari, e quattro volte la somma di tutte le ordinate pari; indi si moltiplichi il risultato per un terzo della comune distanza tra le ordinate. Questa regola è detta la *Regola di Simpson*.

ESEMPII.

1. Se A dinota l'area contenuta tra la catenaria, l'asse delle x, l'asse delle y, ed un'ordinata all'estremità dell'arco s, mostrare che $A = cs$. L'arco s incomincia dal punto più basso della curva.

2. L'intera area della curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

è $\frac{3}{8}\pi ab$. (L'integrazione si può effettuare ponendo $x = a \cos^3\varphi$).

3. L'area della curva $y(x^2+a^2) = c^2(a-x)$ da $x=0$ sino ad $x=a$ è $c^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\right)$.

4. L'area della curva $y^2x = 4a^2(2a-x)$ da $x=0$ ad $x=2a$ è $4\pi a^2$.

5. Trovare l'intera area tra la curva $y^2(x^2+a^2) = a^2x^2$ ed i suoi asintoti. *Risultato.* $4a^2$.

6. Trovare l'area del cappio della curva $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$.

Risultato. $2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

7. Trovare l'area limitata dalla curva $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$ e l'asintoto $x = a$, escludendo il cappio.

Risultato. $2a^2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$.

8. Trovare l'intera area tra la curva $y^2(2a-x) = x^3$ ed i suoi asintoti. *Risultato.* $3\pi a^2$.

9. Trovare l'intera area della curva $(y-x)^2 = a^2 - x^2$.

Risultato. πa^2.

10. Trovare l'area compresa tra le curve

$$y^2 - 4ax = 0,\ x^2 - 4ay = 0. \qquad \textit{Risultato.}\ \frac{16a^2}{3}.$$

11. Trovare l'intera area della curva $a^4y^2 + b^2x^4 = a^2b^2x^2$.

Risultato. $\frac{4}{3}ab$.

12. Trovare l'area di un cappio della curva $a^2y^4 = x^4(a^2 - x^2)$.

Risultato. $\frac{4a^2}{5}$.

13. L'area fra la trattrice, l'asse delle y, e l'asintoto è $\frac{\pi c^2}{4}$. (Si vegga l'Art. 100).

14. Trovare l'area di un cappio della curva

$$y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2). \quad \textit{Risultato.}\ \frac{a^2}{2}(\pi - 2).$$

15. Trovare l'area del cappio della curva

$$16a^4y^2 = b^2x^2(a^2 - 2ax). \quad \textit{Risultato.}\ \frac{ab}{30}.$$

16. Trovare l'area del cappio della curva

$$2y^2(a^2 + x^2) = (a^2 - x^2)^2.$$

Risultato. $a^2\{3\sqrt{2}\log(1 + \sqrt{2}) - 2\}$.

17. Trovare l'intera area della curva

$$2y^2(a^2 + x^2) - 4ay(a^2 - x^2) + (a^2 - x^2)^2 = 0.$$

Risultato. $a^2\pi\left\{4 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right\}$.

18. Trovare l'area della curva

$$y = c \operatorname{sen}\frac{x}{a}.\log\operatorname{sen}\frac{x}{a}$$

da $x = 0$ ad $x = a\pi$. *Risultato.* $2ac(1 - \log 2)$.

19. Trovare l'area della curva $\frac{y}{c} = \left(\frac{x}{a}\right)^n$ tra $x = \alpha$ ed $x = \beta$, e *dal risultato* dedurre l'area dell'iperbole $xy = a^2$ tra gli stessi limiti.

20. Trovare l'area dell'ellisse di cui l'equazione è

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1. \quad \textit{Risultato.}\ \frac{\pi}{\sqrt{(ac - b^2)}}.$$

21. Trovare l'area di un cappio della curva $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Risultato. $\frac{a^2}{2}$.

22. Trovare l'area contenuta da tutti i cappî della curva

$$r = a \operatorname{sen} n\theta.$$

Risultato. $\frac{\pi a^2}{4}$ o $\frac{\pi a^2}{2}$ secondo che n è dispari o pari.

23. Trovare l'area tra le curve $r = a \cos n\theta$ ed $r = a$.

24. Trovare l'area di un cappio della curva $r^2 \cos\theta = a^2 \operatorname{sen} 3\theta$.

Risultato. $\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \log 2$.

25. Trovare l'intera area della curva $r = a(\cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta)$.

Risultato. πa^2.

26. Trovare l'area di un cappio della curva $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

Risultato. $\frac{\pi a^2}{8}$.

27. Trovare l'intera area della curva

$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2x^2 + 4b^2y^2$. *Risultato.* $2\pi(a^2 + b^2)$.

28. Trovare l'intera area della curva

$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2$. *Risultato.* $\frac{\pi c^2}{2ab}(a^2 + b^2)$.

29. Trovare l'area del cappio della curva

$y^3 - 3axy + x^3 = 0$. *Risultato.* $\frac{3a^2}{2}$.

30. Trovare l'area del cappio della curva

$r \cos\theta = a \cos 2\theta$. *Risultato.* $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$.

31. Trovare l'area della curva

$$r = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2 \cos^2 \theta)}} + b \cos \theta,$$

a essendo maggiore di b. *Risultato.* $\frac{\pi a^3}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} + \frac{\pi b^2}{2}$.

32. In una spirale logaritmica trovare l'area tra la curva e due raggi vettori condotti dal polo.

33. Trovare l'area tra la concoide $r = a + b \operatorname{cosec} \theta$ e due raggi vettori condotti dal polo.

34. In un'ellisse trovare l'area tra la curva e due raggi vettori condotti dal centro.

35. In una parabola trovare l'area tra la curva e due raggi vettori condotti dal vertice.

36. Trovare l'area racchiusa tra la curva

$$r = a (\sec \theta + \tan \theta)$$

ed il suo asintoto $r \cos \theta = 2a$. *Risultato.* $\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) a^2$.

37. L'intera area della curva $r = a\,(2 \cos \theta + 1)$ è $a^2 \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, e l'area del cappio interno è $a^2 \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

38. Trovare l'intera area della curva $r = a \cos \theta + b$, in cui a è maggiore di b. Trovare ancora l'area del cappio interno.

39. Se x ed y sono le coordinate di un'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = a^2$, mostrare che

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2u}{a^2}} + e^{-\frac{2u}{a^2}}\right), \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2u}{a^2}} - e^{-\frac{2u}{a^2}}\right),$$

in cui u è l'area intercetta tra la curva, il raggio vettore centrale, e l'asse.

40. Trovare l'intera area della curva che è il luogo dell'intersezione di due normali di un'ellisse ad angoli retti. *Risultato.* $\pi (a - b)^2$.

Si può mostrare che l'equazione della curva è

$$r^2 (a^2 + b^2) (a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2 = (a^2 - b^2)^2 (a^2 \operatorname{sen}^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta)^2.$$

41. Trovare l'area racchiusa tra un arco qualunque descritto dall'estremità del raggio vettore di una spirale in una completa rivoluzione, e la linea retta che congiunge le estremità dell'arco. Se, per esempio, l'equazione della spirale è $r = a \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^n$, dimostrare che l'area corrispondente ad un valore di θ maggiore di 2π è

$$\frac{\pi a^2}{2n+1} \left\{ \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^{2n+1} - \left(\frac{\theta}{2\pi} - 1\right)^{2n+1} \right\}.$$

42. Trovare l'area contenuta tra una parabola, la sua evoluta, e due raggi di curvatura della parabola. (Art. 159).

43. Trovare l'area contenuta tra una cicloide, la sua evoluta, e due raggi di curvatura della cicloide.

44. Trovare l'area della superficie generata dalla rotazione intorno l'asse delle x della curva $xy = k^2$.

45. Ancora della curva $y = ae^{\frac{x}{c}}$.

46. Ancora della catenaria $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$.

47. Mostrare che l'intera superficie di uno sferoide schiacciato è

$$2\pi a^2 \left\{ 1 + \frac{1 - e^2}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e} \right\}.$$

48. Una cicloide gira intorno la tangente al vertice; mostrare che l'intera superficie generata è $\frac{32}{3} \pi a^2$.

49. Una cicloide gira intorno alla sua base; mostrare che l'intera superficie generata è $\frac{64}{3}\pi a^2$.

50. Una cicloide gira intorno al suo asse; mostrare che l'intera superficie generata è $8\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

51. L'intera superficie generata dalla rotazione della trattrice intorno l'asse delle x è $4\pi c^2$.

52. Una sfera è attraversata perpendicolarmente al piano di uno dei suoi circoli massimi da due cilindri retti, di cui i diametri sono eguali al raggio della sfera e gli assi passano per i punti medii di due raggi che compongono un diametro di questo circolo massimo. Trovare la superficie di quella porzione della sfera non racchiusa tra i cilindri.

Risultato. Due volte il quadrato del diametro della sfera.

53. Trovare la superficie generata dalla porzione della curva $y = a \pm a \log \frac{x}{a}$ tra i limiti $x = a$ ed $x = ae$.

Risultato. $4\pi a^2 \left\{ 1 + \sqrt{(1+e^2)} - \sqrt{2} + \log \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{(1+e^2)}} \right\}$.

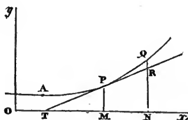
54. Trovare $\int \frac{dS}{p}$, in cui dS rappresenta un elemento di superficie, e p la perpendicolare dall'origine sul piano tangente dell'elemento, l'integrale essendo esteso su tutto l'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Risultato. $\frac{4\pi}{3abc}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

CAPITOLO VIII.

VOLUMI DEI SOLIDI.

Formole che racchiudono Semplice Integrazione. Solido di Rotazione.



178. Sia A un punto fisso di una curva APQ, e P un altro punto sulla curva di cui le coordinate sono x ed y. Giri la curva intorno l'asse delle x, e dinoti V il volume del solido limitato dalla superficie generata dalla curva e da due piani perpendicolari all'asse delle x, l'uno per A e l'altro per P; allora (*Cal. Dif.* Art. 314)

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2,$$

onde

$$V = \int \pi y^2 dx.$$

Dall'equazione della curva y è una funzione nota di x; supponiamo che $\psi(x)$ sia l'integrale di πy^2; allora

$$V = \psi(x) + C.$$

Dinoti V_1 il volume quando il punto P ha x_1 per sua ascissa, e V_2 il volume quando il punto P ha x_2 per sua ascissa; così

$$V_1 = \psi(x_1) + C,$$

$$V_2 = \psi(x_2) + C,$$

onde
$$V_2 - V_1 = \psi(x_2) - \psi(x_1) = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx.$$

179. *Applicazione al Cono retto circolare.*

Una linea retta passi per l'origine e faccia un angolo α con l'asse delle x; allora questa linea retta genererà un cono retto circolare girando intorno l'asse delle x. Qui $y = x \tan \alpha$; così

$$V = \int \pi \tan^2 \alpha \, x^2 dx = \frac{\pi \tan^2 \alpha}{3} x^3 + C,$$

$$V_2 - V_1 = \frac{\pi \tan^2 \alpha}{3} (x_2^3 - x_1^3).$$

Supponiamo $x_1 = 0$, e sia $r = x_2 \tan \alpha$; così il volume diviene $\frac{\pi \tan^2 \alpha \, x_2^3}{3}$, cioè, $\frac{\pi r^2 x_2}{3}$. Quindi il volume del cono retto circolare è un terzo del prodotto dell'area della base per l'altezza.

180. *Applicazione alla Sfera.*

Qui prendendo l'origine al centro della sfera abbiamo $y^2 = a^2 - x^2$; così

$$\int \pi y^2 dx = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Il volume di un emisfero $= \int_0^a \pi y^2 dx = \frac{2\pi a^3}{3}$.

181. *Applicazione al Paraboloide.*

Qui la curva generatrice è la parabola, sicchè

$$y^2 = 4ax.$$

Così $$V_2 - V_1 = \pi\int_{x_1}^{x_2} 4ax\,dx = 2a\pi(x_2^2 - x_1^2).$$

Supponiamo $x_1 = 0$, allora il volume diviene $2a\pi x_2^2$, cioè $\frac{1}{2}\pi y_2^2 x_2$, in cui $y_2^2 = 4ax_2$; così il volume è la metà di quello di un cilindro che ha la stessa altezza, cioè x_2, e la stessa base, cioè il circolo di cui y_2 è il raggio.

182. *Applicazione al Solido formato da una Cicloide.*

Giri una cicloide intorno il suo asse; quì (*Cal. Dif.* Art. 358)

$$y = \sqrt{(2ax - x^2)} + a\,\text{vers}^{-1}\frac{x}{a}.$$

L'integrazione è meglio effettuata ponendo per x ed y i loro valori in termini di θ (*Cal. Dif.* Art. 358). Così

$$\pi\int y^2 dx = \pi a^3\int(\theta + \text{sen}\,\theta)^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta.$$

Per ottenere il volume generato da una semicicloide i limiti per x sarebbero 0 e $2a$; così i corrispondenti limiti per θ sono 0 e π.

Ora $$\int\theta^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = -\theta^2\cos\theta + 2\int\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= -\theta^2\cos\theta + 2\theta\,\text{sen}\,\theta + 2\cos\theta,$$

onde $$\int_0^\pi \theta^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = \pi^2 - 4;$$

$$2\int\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\theta = \int\theta(1 - \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta\,\text{sen}\,2\theta}{2} - \frac{\cos 2\theta}{4},$$

onde $$2\int_0^\pi\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ed $$\int_0^\pi\text{sen}^3\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^3\theta\,d\theta = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot \text{(Art. 35)}.$$

Così il volume richiesto

$$= \pi a^3\left\{\pi^2 - 4 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{3}\right\} = \pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right).$$

183. Questa formola per il volume di un solido di rotazione, $V=\int \pi y^2 dx$, simile alle altre che abbiamo notate, è una di cui la verità è manifesta, appena si è compresa la notazione del Calcolo Integrale. Nella figura dell'Art. 128, se PM è y ed MN sia dinotato da Δx, allora $\pi y^2 \Delta x$ è il valore del solido generato dalla rotazione di $MNpP$ intorno l'asse delle x. Così $\Sigma \pi y^2 \Delta x$ differirà dal volume generato dalla rotazione di $ADEB$ per la somma dei volumi che sono generati da PpQ, e l'ultima somma svanirà nel limite. Così il volume generato dalla rotazione di $ADEB$ è eguale al limite di $\Sigma \pi y^2 \Delta x$, cioè, ad $\int \pi y^2 dx$.

184. Similmente, se V dinota il volume limitato dalla superficie formata da una curva che gira intorno l'asse delle y, e da piani perpendicolari all'asse delle y, avremo

$$V=\int \pi x^2 dy.$$

E, come nell'Art. 178, avremo

$$V_2 - V_1 = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 dy.$$

185. Supponiamo che due curve girino intorno l'asse delle x, generando così due superficie, e che si voglia la *differenza* dei due volumi, l'uno limitato dalla prima superficie e da piani perpendicolari all'asse delle x, e l'altro limitato dalla seconda superficie e dai piani già assegnati. Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione della prima curva, ed $y=\psi(x)$ quella della seconda. Allora se V dinota la richiesta differenza, abbiamo

$$V=\int \pi \{\varphi(x)\}^2 dx - \int \pi \{\psi(x)\}^2 dx$$

$$= \pi \int [\{\varphi(x)\}^2 - \{\psi(x)\}^2]\, dx.$$

Se i piani che limitano il volume richiesto sono determinati da $x = x_1$ ed $x = x_2$, dobbiamo integrare tra i limiti x_1 ed x_2 per x.

186. Supponiamo, per esempio, che una curva chiusa sia tale che la linea $y = a$ divida per metà ogni ordinata parallela all' asse delle y; allora abbiamo $\varphi(x) = a + \chi(x)$ e $\psi(x) = a - \chi(x)$, in cui $\chi(x)$ dinota una funzione di x. Così

$$\{\varphi(x)\}^2 - \{\psi(x)\}^2 = 4a\chi(x),$$

e

$$V = \pi \int 4a\chi(x)\,dx$$

Supponiamo che le ascisse dei punti estremi della curva siano x_2 ed x_1 allora il volume generato dalla rotazione della curva chiusa intorno l'asse delle x è $4a\pi\int_{x_1}^{x_2}\chi(x)\,dx$. E $2\int_{x_1}^{x_2}\chi(x)\,dx$ è l'area della curva chiusa, sicchè il volume è eguale al prodotto di $2a\pi$ per l'area. Questa dimostrazione suppone che la curva generatrice sia posta interamente da una parte dell' asse delle x.

Se la curva generatrice è il circolo dato da

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = c^2,$$

abbiamo πc^2 per la sua area, e quindi $2kc^2\pi^2$ per il volume generato dalla sua rotazione intorno l'asse delle x.

187. In simil modo se le curve $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, girano intorno l'asse delle y otteniamo per il volume limitato da queste superficie e da piani perpendicolari all' asse delle y

$$V = \pi \int [\{\varphi(y)\}^2 - \{\psi(y)\}^2]\,dy.$$

188. Il metodo dato nell' Art. 178 per trovare il volume di un *solido di rotazione* si può adattare ad *ogni* solido. Il metodo si può descrivere così: si concepisca il solido tagliato in strati sottili da una serie di piani paralleli, si valuti approssimativamente il volume di ciascuno strato e si sommino questi volumi; il limite di questa somma quando ogni

strato diviene indefinitamente sottile è il volume del solido richiesto. Supponiamo che un solido sia tagliato in strati da piani perpendicolari all'asse delle x; sia $\varphi(x)$ l'area della sezione del solido fatta da un piano alla distanza x dall'origine, e sia $x+\Delta x$ la distanza del piano seguente dall'origine; così questi due piani intercettano uno strato di cui la spessezza è Δx, o di cui il volume si può rappresentare con $\varphi(x)\,\Delta x$. Il volume del solido sarà perciò il limite di $\Sigma\varphi(x)\,\Delta x$, cioè, sarà $\int\varphi(x)\,dx$; i limiti dell'integrazione dipenderanno dal particolare solido o porzione di solido che si considera.

189. *Applicazione ad un Ellissoide.*

L'equazione dell'ellissoide è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

se si fa una sezione con un piano perpendicolare all'asse delle x ad una distanza x dall'origine, il contorno della sezione è un'ellisse, di cui i semiassi sono $b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$ e $c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$; quindi l'area di questa ellisse è $\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$; questo è perciò il valore di $\varphi(x)$. Quindi il volume dell'ellissoide

$$=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{4\pi abc}{3}.$$

190. *Applicazione ad una Piramide.*

Supponiamo una piramide, che abbia per base una figura rettilinea qualunque; sia A l'area della base ed h l'altezza. Si prenda l'origine delle coordinate al vertice della piramide, e l'asse delle x perpendicolare alla base della piramide, allora il volume della piramide

$$=\int_0^h\varphi(x)\,dx.$$

Ora la sezione della piramide fatta da un piano parallelo alla base è una figura rettilinea simile alla base, e le aree delle figure simili stanno come i quadrati dei loro lati omologhi; ed x ed h sono proporzionali ai lati omologhi; quindi deduciamo che

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{h^2} A.$$

Così il volume della piramide

$$= \frac{A}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{Ah}{3}.$$

Questa investigazione vale ancora per un cono, di cui la base è una curva chiusa qualunque.

191. Come esempio troveremo il volume compreso tra un'iperboloide ad una falda, il suo cono asintotico e due piani perpendicolari al loro asse comune.

Sia l'equazione dell'iperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

e quella del cono

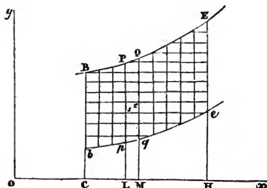
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Se si fa una sezione della prima superficie con un piano perpendicolare all'asse delle x e ad una distanza x dall'origine, il contorno è un'ellisse di cui l'area è $\pi bc\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)$; la sezione fatta nella seconda superficie dallo stesso piano ha anche per suo contorno un'ellisse, e la sua area è $\frac{\pi bcx^2}{a^2}$. Onde la differenza delle aree è πbc. Quindi il volume richiesto, supponendolo limitato dai piani $x = x_1$ ed $x = x_2$, è

$$\int_{x_1}^{x_2} \pi bc\, dx, \text{ cioè, } \pi bc\,(x_2 - x_1).$$

192. Alle volte può essere conveniente di fare sezioni con piani paralleli non perpendicolari all'asse delle x. Se α è l'inclinazione dell'asse delle x ai piani paralleli, allora $\varphi(x)$ sen$\alpha\,\Delta x$ si può prendere come il volume di uno strato e l'integrazione si esegue come prima.

Formole che racchiudono Doppia Integrazione.



193. Daremo prima una formola per il volume di un solido di rotazione. Nella figura, siano x, y le coordinate di s, ed $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ quelle di t. Supponiamo che l'intera figura giri intorno l'asse delle x, allora l'elemento st genererà un anello, il volume del quale sarà ultimamente $2\pi y\,\Delta x\,\Delta y$; questo segue dalla considerazione che $\Delta x\,\Delta y$ è l'area di st e $2\pi y$ il perimetro del circolo descritto da s. Quindi il volume generato dalla figura $BEeb$, o da una porzione di essa, sarà il limite della somma di termini come $2\pi y\,\Delta x\,\Delta y$. Dinoti V il volume richiesto, allora

$$V = 2\pi \iint y\,dx\,dy;$$

i limiti dell'integrazione essendo presi in modo da includere tutti gli elementi del volume richiesto.

194. Supponiamo che il volume richiesto sia quello che si ottiene dalla rotazione di tutta la figura $BEeb$; sia $y=\varphi(x)$

l'equazione della curva superiore, $y=\psi(x)$ quella della curva inferiore, e siano $OC=x_1$, $OH=x_2$. Dovremo allora integrare prima rispetto ad y tra i limiti $y=\psi(x)$ ed $y=\varphi(x)$; così sommiamo tutti gli elementi simili a $2\pi y\,\Delta x\,\Delta y$ che sono contenuti nel solido formato dalla rotazione della striscia $PQqp$; poi integriamo rispetto ad x tra i limiti x_1 ed x_2. Così per esprimere l'operazione simbolicamente

$$V=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} y\,dx\,dy$$

$$=\pi\int_{x_1}^{x_2}[\{\varphi(x)\}^2-\{\psi(x)\}^2]\,dx.$$

La seconda espressione si è ottenuta effettuando l'integrazione rispetto ad y tra i limiti assegnati, e coincide con quella già ottenuta nell'Art. 185.

195. Così nel precedente articolo dividiamo il solido in anelli elementari, di cui $2\pi y\,\Delta x\,\Delta y$ è il tipo; nella prima integrazione riuniamo un numero di questi anelli, in modo da formare una figura, che è la differenza di due strati circolari concentrici; nella seconda integrazione riuniamo tutte queste figure e così otteniamo il volume del solido richiesto.

196. Supponiamo la figura che gira intorno l'asse delle x limitata dalle curve $x=\varphi(y)$ ed $x=\psi(y)$, e dalle linee rette $y=y_1$ ed $y=y_2$; allora applicando la formola per V sarà conveniente di integrare prima rispetto ad x; così

$$V=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} y\,dy\,dx.$$

In questo caso nell'integrazione rispetto ad x riuniamo tutti gli elementi simili a $2\pi y\,\Delta y\,\Delta x$ che hanno lo stesso raggio y, sicchè la somma degli elementi è un sottile guscio cilindrico, di cui Δy è la spessezza, y il raggio, e $\varphi(y)-\psi(y)$ l'altezza. Così

$$V=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\{\varphi(y)-\psi(y)\}\,y\,dy.$$

197. Come un esempio delle formole precedenti, si cerchi il volume del solido generato dalla rotazione dell'area ALB intorno l'asse delle x nella figura già data nell'Art. 141. Questo volume è l'eccesso dell'emisfero generato dalla rotazione di SLB sul paraboloide generato dalla rotazione di ASL; il risultato è perciò conosciuto, e proponiamo l'esempio, non ad oggetto del risultato, ma per illustrazione delle formole di doppia integrazione.

Sia S l'origine. Supponiamo che la direzione positiva dell'asse delle x sia a sinistra, allora l'equazione di AL è $y^2 = 4a(a-x)$ e quella di BL è $y^2 = 4a^2 - x^2$. Sia V il volume richiesto, allora

$$V = \int_0^{2a} \int_{\frac{4a^2-y^2}{4a}}^{\sqrt{(4a^2-y^2)}} 2\pi y \, dy \, dx.$$

Se vogliamo integrare prima rispetto ad y, dobbiamo, come nell'Art. 141, supporre la figura ALB divisa in due parti; così

$$V = \int_0^a \int_{\sqrt{(4a^2-4ax)}}^{\sqrt{(4a^2-x^2)}} 2\pi y \, dx \, dy + \int_a^{2a} \int_0^{\sqrt{(4a^2-x^2)}} 2\pi y \, dx \, dy.$$

Inoltre, si cerchi il volume generato dalla rotazione di LDC intorno l'asse delle x. Sia ora la direzione positiva dell'asse delle x a dritta, allora l'equazione di LC è $y^2 = 4a(a+x)$ e quella di LD è $y^2 = 4a^2 - x^2$. Sia V il volume richiesto, allora

$$V = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{(4a^2-x^2)}}^{\sqrt{(4a^2+4ax)}} 2\pi y \, dx \, dy.$$

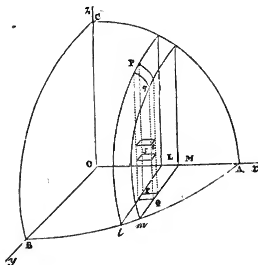
Se vogliamo integrare prima rispetto ad x, dobbiamo, come nell'Art. 141, supporre la figura LDC divisa in due parti; così

$$V = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{(4a^2-y^2)}}^{2a} 2\pi y \, dy \, dx + \int_{2a}^{2a\sqrt{3}} \int_{\frac{y^2-4a^2}{4a}}^{2a} 2\pi y \, dy \, dx.$$

198. Similmente, se un solido è formato dalla rotazione di una curva intorno l'asse delle y, abbiamo

$$V = \iint 2\pi x \, dy \, dx.$$

199. Procediamo ora a considerare un solido qualunque.



Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque p di una superficie, $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ le coordinate di un punto adiacente q. Per p si conducano i piani paralleli ai piani coordinati delle (x, z) ed (y, z); per q si tirino anche i piani paralleli agli stessi piani coordinati. Questi quattro piani racchiuderanno tra loro una colonna, di cui PQ è la base e Pp l'altezza. Il volume di questa colonna sarà ultimamente $z\Delta x\Delta y$, ed il volume tra una porzione assegnata della data superficie ed il piano delle (x, y) si troverà prendendo il limite della somma di una serie di termini come $z\Delta x\Delta y$. Dinoti V questo volume, allora

$$V=\iint z dx\, dy.$$

L'equazione della superficie dà z come una funzione di x ed y; i limiti dell'integrazione debbono essere presi in modo da includere tutti elementi del solido proposto.

Se integriamo prima rispetto ad y, sommiamo le colonne che formano uno strato compreso tra due piani perpendicolari all'asso delle x; così i limiti dell'integrazione rispetto ad y possono essere funzioni di x, ed otterremo

$$\int z dy = f(x),$$

in cui $f(x)$ è in fatti l'area della sezione del solido considerato fatta da un piano perpendicolare all'asso delle x ad una distanza x dall'origine. Allora finalmente

$$V = \int f(x)\, dx;$$

questo coincide con la formola già data nell'Art. 188.

200. *Applicazione all'Ellissoide.*

Si cerchi il volume dell'ottava parte dell'ellissoide determinato dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Quì dobbiamo trovare

$$\iint c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\, dx\, dy.$$

S'integri prima rispetto ad y, allora i limiti di y sono 0 ed Ll, cioè, 0 e $b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$; otteniamo così la somma di tutte le colonne che formano lo strato tra i piani Lpl ed Mqm. Ora tra i limiti assegnati

$$\int \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\, dy = \frac{\pi b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

così
$$V = \int \frac{\pi}{4} bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx.$$

I limiti di x sono 0 ed a; otteniamo così la somma di

tutti gli strati che sono compresi nel solido $OABC$. Quindi $V=\frac{\pi abc}{6}$.

201. Supponiamo la data superficie determinata da $xy=az$, e si cerchi il volume limitato dal piano delle (x, y), dalla superficie data, e dai quattro piani $x=x_1$, $x=x_2$, $y=y_1$, $y=y_2$. Quì il volume è dato da

$$V=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{xy}{a}\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{4a}(y_2^2-y_1^2)(x_2^2-x_1^2)$$

$$=\frac{1}{4a}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\{x_1y_1+x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1\}$$

$$=\frac{1}{4}(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_1+z_2+z_3+z_4),$$

in cui z_1, z_2, z_3, z_4 sono le ordinate dei quattro punti agli angoli della porzione scelta.

202. Trovare il volume compreso tra il piano $z=0$ e le superficie $xy=az$ ed $(x-h)^2+(y-k)^2=c^2$.

Qui dobbiamo integrare $\iint\frac{xy}{a}\,dx\,dy$ tra i limiti determinati da $(x-h)^2+(y-k)^2=c^2$.

Ora $\int y\,dy=\frac{y^2}{2}$, ed i limiti di y sono

$$k-\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}} \text{ e } k+\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}.$$

Così otteniamo

$$2k\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}.$$

Così finalmente il volume richiesto

$$=\frac{2k}{a}\int x\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}\,dx,$$

in cui i limiti di x sono $h-c$ ed $h+c$.

Ed

$$\int x \sqrt{\{c^2 - (x-h)^2\}}\, dx = \int (x-h) \sqrt{\{c^2 - (x-h)^2\}}\, dx$$
$$+ h \int \sqrt{\{c^2 - (x-h)^2\}}\, dx.$$

Si ponga $x - h = t$; così otteniamo

$$\int t \sqrt{(c^2 - t^2)}\, dt + h \int \sqrt{(c^2 - t^2)}\, dt.$$

I limiti di t sono $-c$ e $+c$; onde il risultato è $\frac{hc^2\pi}{2}$; ed il volume richiesto è $\frac{hkc^2\pi}{a}$.

Questo risultato però suppone che xy sia *positivo* tra i limiti dell' integrazione; cioè, il circolo determinato da $(x-h)^2 + (y-k)^2 = c^2$ è supposto giacere interamente nel primo quadrante o interamente nel terzo quadrante. Se questa condizione non è soddisfatta il nostro risultato non dà il valore aritmetico del volume, ma la differenza che nasce dal considerare alcune parti del volume come positive ed altre come negative; per esempio, se h o k svaniscono il nostro risultato svanisce.

Similmente nel risultato dell' articolo precedente, si è supposto che xy sia *positivo* tra i limiti dell' integrazione.

203. Invece di dividere un solido in colonne su basi rettangolari, sicchè $z\Delta x\, \Delta y$ sia il volumo della colonna, possiamo dividerlo in colonne che abbiano per base l' elemento polare dell' area; allora $zr\Delta\theta\, \Delta r$ è il volumo della colonna. Onde per il volume V di un solido abbiamo la formola

$$V = \iint zr\, d\theta\, dr.$$

Dall' equazione della superficie z si può esprimere come una funzione di r e θ,

Per esempio, si voglia il volume compreso tra il piano $z = 0$, e le superficie $x^2 + y^2 = 4az$ ed $y^2 = 2cx - x^2$. Qui $z = \frac{r^2}{4a}$; ed i limiti di r e θ debbono essere tali da esten-

dere l'integrazione sull'intera area del circolo $y^2 = 2cx - x^2$. Sia $r_1 = 2c\cos\theta$; allora il volume richiesto

$$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{r_1} \frac{r^3}{4a}\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{c^4}{a} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2c^4}{a} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2c^4}{a} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ (Art. 35)}$$

$$= \frac{3\pi c^4}{8a}.$$

204. Si cerchi il volume del solido compreso tra il piano delle (x, y) e la superficie di cui l'equazione è

$$z = ae^{-\frac{x^2+y^2}{c^2}}.$$

Quì, poichè $x^2 + y^2 = r^2$,

$$V = a \iint e^{-\frac{r^2}{c^2}} r d\theta\, dr.$$

La superficie si estende ad un'infinita distanza dall'origine in ogni direzione; così i limiti di θ sono 0 e 2π, e quelli di r sono 0 ed ∞.

Ora $$\int e^{-\frac{r^2}{c^2}} r dr = -\frac{e^{-\frac{r^2}{c^2}}}{2} c^2;$$

così $$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{c^2}} r dr = \frac{c^2}{2}.$$

Ed $$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Quindi il volume richiesto è $\pi a c^2$.

Formole che racchiudono Tripla Integrazione.

205. Nella figura dell' Art. 199, supponiamo che si tiri una serie di piani perpendicolari all'asse delle z; sia z la distanza di un piano dall'origine e $z+\Delta z$ la distanza del seguente. Questi piani intercettano dalla colonna $pqPQ$ un parallelepipedo rettangolo elementare, il volume del quale è $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. L'intero solido si può considerare come il limite della somma di tali elementi. Quindi se V dinota il suo volume,

$$V = \iiint dx\, dy\, dz.$$

206. Si cerchi il volume di una porzione del cilindro determinato dall'equazione

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

che è intercettata tra i piani

$$z = x \tan\alpha \text{ e } z = x \tan\beta.$$

Quì se y_1 sta per $\sqrt{(2ax - x^2)}$, abbiamo

$$V = \int_0^{2a}\int_{-y_1}^{y_1}\int_{x\tan\alpha}^{x\tan\beta} dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{2a}\int_{-y_1}^{y_1} (\tan\beta - \tan\alpha)\, x dx\, dy$$

$$= 2\,(\tan\beta - \tan\alpha)\int_0^{2a} x\sqrt{(2ax - x^2)}\, dx$$

$$= 2\,(\tan\beta - \tan\alpha)\,\frac{\pi a^3}{2}.$$

207. L'elemento polare dell'area piana è, come abbiamo veduto negli articoli precedenti, $r\Delta\theta\,\Delta r$. Supponendo che questo giri intorno la linea iniziale per un angolo 2π, allora si genererà un anello solido, di cui il volume è

$2\pi r$ sen $\theta\, r\Delta\theta\, \Delta r$, poichè $2\pi r$ sen θ è la circonferenza del circolo descritta dal punto di cui le coordinate polari sono r e θ. Dinoti φ l'angolo che il piano dell'elemento in una posizione qualunque fa con la posiziono inizialo del piano, $\varphi + \Delta\varphi$ l'angolo che il piano in una posizione consecutiva fa col piano iniziale; allora la parte dell'anollo solido cho è intercetta tra il piano rotante in queste due posizioni sta all'intero anello nella stessa proporzione come $\Delta\varphi$ sta a 2π. Quindi il volume di questa parte intercetta è

$$r^2 \text{ sen } \theta\, \Delta\varphi\, \Delta\theta\, \Delta r.$$

Questa è perciò un'espressione in coordinate polari per un elemento di un solido qualunquo. Quindi il volume dell'intero solido si può trovaro prendendo il limite della somma di tali elementi; cioè, se V dinota il volume richiesto,

$$V = \iiint r^2 \text{ sen } \theta\, d\varphi\, d\theta\, dr.$$

I limiti dell'integrazione debbono essere presi in modo da includere nell'integraziono tutti gli elementi del solido proposto. Lo studente si rammenterà che r dinota la distanza di un punto dall'origine, θ l'angolo che questa distanza fa con una retta fissa condotta per l'origine, o φ l'angolo che il piano condotto per questa distanza e per la retta fissa fa con un piano fisso che passa per la retta fissa.

208. Supponiamo, per esempio, che si applichi la formola a trovare il volume dell'ottava parte della sfera. S'integri prima rispetto ad r; abbiamo

$$\int r^2\, dr = \frac{r^3}{3}.$$

Si supponga a il raggio della sfera, allora i limiti di r sono 0 ed a; così

$$V = \iint \frac{a^3}{3} \text{ sen } \theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Nell'integrare così rispetto ad r, riuniamo tutti gli elementi come r^2 sen $\theta\, \Delta\varphi\, \Delta\theta\, \Delta r$ che compongono un solido pi-

ramidale, che ha il suo vertice al centro della sfera, e per sua base l'elemento curvilineo di superficie sferica, che è dinotato da $a^2 \operatorname{sen}\theta\, \Delta\varphi\, \Delta\theta$.

S'integri in seguito rispetto a θ; abbiamo

$$\int \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\cos\theta;$$

i limiti di θ sono 0 e $\frac{\pi}{2}$; così

$$V = \int \frac{a^3}{3} d\varphi.$$

Integrando così rispetto a θ, riuniamo tutte le piramidi simili ad $\frac{a^3}{3} \operatorname{sen}\theta\, \Delta\varphi\, \Delta\theta$ che formano uno strato cuneiforme del solido contenuto tra i due piani condotti per la linea fissa corrispondenti a φ e $\varphi + \Delta\varphi$.

Finalmente, s'integri rispetto a φ da 0 a $\frac{\pi}{2}$; così

$$V = \frac{\pi a^3}{6}.$$

In questo esempio le integrazioni si possono eseguire in ordine qualunque, e lo studente dovrebbe esaminarle ed illustrarle.

209. Un cono retto ha il suo vertice sulla superficie di una sfera, ed il suo asse coincide col diametro della sfera che passa per quel punto; trovare il volume comune al cono ed alla sfera.

Sia a il raggio della sfera; α il semi-angolo al vertice del cono, V il volume richiesto, allora l'equazione polare della sfera col vertice del cono come origine è $r = 2a \cos\theta$. Onde

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{2a\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr.$$

210. La curva $r = a(1 + \cos\theta)$ giri intorno alla linea iniziale, trovare il volume del solido generato.

Quì il volume richiesto

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3 \operatorname{sen}\theta \, d\theta.$$

Si troverà che questo è $=\frac{8\pi a^3}{3}$.

ESEMPII.

1. Se la curva $y^2(x-4a)=ax(x-3a)$ gira intorno l'asse delle x, il volume generato tra $x=0$ ed $x=3a$ è $\frac{\pi a^3}{2}(15-16\log 2)$.

2. Una cicloide gira intorno alla tangente al vertice; mostrare che il volume generato dalla curva è $\pi^2 a^3$.

3. Una cicloide gira intorno alla sua base; mostrare che il volume generato dalla curva è $5\pi^2 a^3$.

4. La curva $y^2(2a-x)=x^3$ gira intorno al suo asintoto; mostrare che il volume generato è $2\pi^2 a^3$.

5. La curva $xy^2=4a^2(2a-x)$ gira intorno al suo asintoto; mostraro che il volume generato è $4\pi^2 a^3$.

6. Trovare il volume della porzione chiusa del solido generato dalla rotazione della curva $(y^2-b^2)^2=a^3x$ intorno all'asse delle y.

   Risultato. $\frac{256}{315}\frac{\pi b^9}{a^6}$.

7. Esprimere il volume di un segmento sferico in termini della sua altezza e dei raggi delle basi.

   Risultato. $\frac{\pi h}{6}\{h^2+3(r_1^2+r_2^2)\}$.

8. Se la curva $y^2 = 2mx + nx^2$ gira intorno l'asse delle x, trovare il volume di un segmento qualunque; e mostrare che esso può esprimersi con

$$\frac{\pi h}{2}\left(b^2 + c^2 - \frac{1}{3}nh^2\right) \text{ o con } \pi h\left(r^2 + \frac{nh^2}{12}\right),$$

in cui h è l'altezza del segmento e b, c, r sono i raggi delle sue basi e della sezione media. Dedurre le espressioni per il volume di un cono e di uno sferoide.

9. Trovare con l'integrazione il volume racchiuso tra un cono retto il di cui angolo al vertice è di 60°, ed una sfera di dato raggio che lo tocca lungo un circolo.

Risultato. $\frac{\pi r^3}{6}$.

10. Se un paraboloide ha il suo vertice nella base, e l'asse sulla superficie di un cilindro, il cilindro sarà diviso in due parti che stanno come 3 : 5 dalla superficie del paraboloide; l'altezza ed il diametro della base del cilindro ed il lato retto del paraboloide essendo tutti eguali.

11. Un paraboloide di rotazione ed un cono retto hanno la stessa base, lo stesso asse, e lo stesso vertice, ed una sfera è descritta su questo asse come diametro; mostrare che il volume intercetto tra il paraboloide ed il cono serba la stessa ragione al volume della sfera che il lato retto della parabola serba al diametro della sfera.

12. Trovare l'intero volume del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

Risultato. $\frac{8\pi abc}{5}$.

13. Trovare l'intero volume del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 27a^3xyz.$$

Risultato. $\frac{9}{2}a^3$.

14. Trovare il volume del solido formato dalla rotazione della curva $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ intorno l'asse delle x, supponendo a maggiore di b. Mostrare ciò che il risultato diviene quando $a=b$.

$$\textit{Risultato.}\ \frac{\pi}{6}(2a^2+3b^2)\,a+\frac{\pi b^4}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}\log\frac{a+\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}.$$

15. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione della curva $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ intorno l'asse delle y, supponendo a maggiore di b. Mostrare ciò che il risultato diviene quando $a=b$.

$$\textit{Risultato.}\ \frac{\pi}{6}(2b^2+3a^2)\,b+\frac{\pi a^4}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}.$$

16. Trovare il volume del solido formato dalla rotazione della curva $(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ intorno l'asse delle x.

$$\textit{Risultato.}\ \frac{\pi a^3}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})-\frac{1}{3}\right\}.$$

17. Un paraboloide di rotazione ha il suo asse che coincide con un diametro di una sfera, ed il suo vertice fuori della sfera; trovare il volume della porzione della sfera fuori del paraboloide.

Risultato. $\frac{\pi h^3}{6}$, in cui h è la distanza tra i due piani nei quali sono situate le curve d'intersezione delle superficie.

18. Trovare il volume tagliato dalla superficie

$$\frac{z^2}{c}+\frac{y^2}{b}=2x$$

con un piano parallelo a quello delle (y, z) ad una distanza a da esso. *Risultato.* $\pi a^2\sqrt{(bc)}$.

19. Un quadrante di un'ellisse gira intorno la tangente all'estremità dell'asse minore dell'ellisse; mostrare che

il volume racchiuso dalla superficie formata dalla *curva* è

$$\frac{\pi ab^2}{6}(10 - 3\pi).$$

20. Trovare il volume compreso tra le superficie definite dalle equazioni

$$x^2 + y^2 = cz, \qquad x^2 + y^2 = ax, \qquad z = 0,$$

illustrando con figure il progresso della sommazione.

Risultato. $\dfrac{3\pi a^4}{32c}$.

21. Se S è una superficie chiusa, dS un elemento di S intorno un punto P ad una distanza r da un punto fisso O, e φ l'angolo che la normale in P condotta all'indentro fa con il raggio vettore OP, mostrare che il volume contenuto dalla superficie

$$= \frac{1}{3}\int r \cos\varphi \, dS,$$

la sommazione essendo estesa sull'intera superficie.

Prendendo il centro di un ellissoide per il punto O, applicare questa formola a trovare il suo volume, interpetrando geometricamente i passi dell'integrazione.

22. Trovare il valore di $\iiint x^2 \, dx \, dy \, dz$ sul volume di un ellissoide.

Risultato. $\dfrac{4\pi a^3 bc}{15}$.

23. Determinare i limiti dell' integrazione per ottenere il volume contenuto tra il piano delle (x, y) e la superficie di cui l'equazione è

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 - Dz - F = 0.$$

24. Stabilire i limiti dell' integrazione da adoperarsi nell'applicare la formola $\iiint dx \, dy \, dz$ per trovare il volume di una superficie chiusa di secondo ordine di cui l'equazione è

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + a'yz + b'xz + c'xy = 1.$$

25. Stabilire tra quali limiti debbono effettuarsi le integrazioni in

$$\iiint dx\, dy\, dz$$

per ottenere il volume contenuto tra la superficie conica di cui l'equazione è

$$z = a - \sqrt{(x^2 + y^2)},$$

ed i piani di cui le equazioni sono $x = z$ ed $x = 0$; e trovare il volume con questo o con altro metodo.

Risultato. $\frac{2a^3}{9}$.

26. Stabilire tra quali limiti si debbono prendere le integrazioni per ottenere il volume del solido contenuto tra le due superficie $cz = mx^2 + ny^2$ e $z = ax + by$; e mostrare che il volume è $\frac{\pi c^3}{8}$ quando

$$m = n = a = b = 1.$$

27. Una cavità è giustamente ampia abbastanza da permettere la completa rotazione di un disco circolare di raggio c, il di cui centro descrive un circolo dello stesso raggio c, mentre il piano del disco è costantemente parallelo ad un piano fisso, e perpendicolare a quello del circolo nel quale il suo centro si muove. Mostrare che il volume della cavità è

$$\frac{2c^3}{3}(3\pi + 8).$$

28. L'asse di un cono retto coincide con la linea generatrice di un cilindro; il diametro sì del cono che del cilindro è eguale alla comune altezza; trovare la superficie ed il volume di ciascuna parte in cui il cono è diviso dal cilindro.

Risultati.

Superficie $\frac{4\pi\sqrt{5} - 3\sqrt{15}}{6}a^2$ e $\frac{2\pi\sqrt{5} + 3\sqrt{15}}{6}a^2$;

Volumi, $\frac{8\pi + 27\sqrt{3} - 64}{9} a^3$ e $\frac{64 - 27\sqrt{3} - 2\pi}{9} a^3$;

in cui a è il raggio della base del cono o cilindro.

29. Trovare il volume del cono-cuneo determinato da

$$z^2 + \frac{a^2 y^2}{x^2} = c^2,$$

che è contenuto tra i piani $x = 0$ ed $x = a$.

Risultato. $\frac{\pi c^2 a}{2}$.

30. Un conoide è generato da una linea retta che si appoggia all'asse delle z ed è perpendicolare ad esso. Due sezioni sono fatte da piani paralleli, i due piani essendo paralleli all'asse delle z. Mostrare che il volume del conoide racchiuso tra i piani è eguale al prodotto della distanza tra i piani per la semi-somma delle aree delle sezioni fatte dai piani.

CAPITOLO IX.

DIFFERENZIAZIONE DI UN INTEGRALE RISPETTO AD UNA QUANTITÀ QUALUNQUE CHE ESSO PUÒ RACCHIUDERE.

211. È alle volte necessario di differenziare un integrale rispetto a qualche quantità che esso racchiude; questa quistione andremo ora a considerare.

Si voglia il coefficiente differenziale di $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ rispetto a b, supponendo che $\varphi(x)$ non contenga b, ed a sia indipendente da b.

Sia
$$u = \int_a^b \varphi(x)\,dx;$$

supponiamo b mutato in $b + \Delta b$, in conseguenza di che u diviene $u + \Delta u$; così

$$u + \Delta u = \int_a^{b+\Delta b} \varphi(x)\,dx;$$

onde

$$\Delta u = \int_a^{b+\Delta b} \varphi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx$$
$$= \int_b^{b+\Delta b} \varphi(x)\,dx.$$

Ora, per l'Art. 40,

$$\int_b^{b+\Delta b} \varphi(x)\,dx = \Delta b\,\varphi(b + \theta\Delta b),$$

in cui θ è una frazione propria; così

$$\frac{\Delta u}{\Delta b} = \varphi(b + \theta\Delta b).$$

Diminuiscano Δb e Δu senza limite; così

$$\frac{du}{db} = \varphi(b).$$

212. Similmente, se differenziamo u rispetto ad a, supponendo che $\varphi(x)$ non contenga a, e b sia indipendente da a, otteniamo

$$\frac{du}{da} = -\varphi(a).$$

213. Supponiamo che $\varphi(x)$ contenga una quantità c, e si voglia trovare il coefficiente differenziale di $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ rispetto a c, supponendo a e b indipendenti da c.

Invece di $\varphi(x)$ sarà conveniente di scrivere $\varphi(x, c)$, sicchè la presenza della quantità c possa essere più chiaramente indicata; si dinoti l'integrale con u, così

$$u = \int_a^b \varphi(x, c)\,dx.$$

Si supponga c mutato in $c + \Delta c$, in conseguenza di che u diviene $u + \Delta u$; così

$$u + \Delta u = \int_a^b \varphi(x, c + \Delta c)\,dx;$$

onde

$$\Delta u = \int_a^b \varphi(x, c + \Delta c)\,dx - \int_a^b \varphi(x, c)\,dx$$

$$= \int_a^b \{\varphi(x, c + \Delta c) - \varphi(x, c)\}\,dx;$$

così

$$\frac{\Delta u}{\Delta c} = \int_a^b \frac{\varphi(x, c + \Delta c) - \varphi(x, c)}{\Delta c}\,dx.$$

Ora per la natura del coefficiente differenziale abbiamo

$$\frac{\varphi(x, c + \Delta c) - \varphi(x, c)}{\Delta c} = \frac{d\varphi(x, c)}{dc} + \rho,$$

in cui ρ è una quantità che diminuisce senza limite con Δc. Così abbiamo

$$\frac{\Delta u}{\Delta c} = \int_a^b \frac{d\varphi(x, c)}{dc}\, dx + \int_a^b \rho\, dx.$$

Quando Δc è diminuito indefinitamente, il secondo integrale svanisce; poichè esso non è maggiore di $(b-a)\rho'$, in cui ρ' è il più gran valore che ρ può avere, e ρ' ultimamente svanisce. Quindi, procedendo al limite, abbiamo

$$\frac{du}{dc} = \int_a^b \frac{d\varphi(x, c)}{dc}\, dx.$$

214. Si deve notare che l'articolo precedente suppone che nè a nè b sia infinito; se, per esempio, b fosse infinito, non potremmo asserire che $(b-a)\rho'$ debba necessariamente svanire nel limite.

215. Abbiamo adunque mostrato nell'Art. 213 che

$$\frac{d}{dc}\int_a^b \varphi(x, c)\, dx = \int_a^b \frac{d\varphi(x, c)}{dc}\, dx \ldots\ldots. (1).$$

Indicheremo un' utile applicazione di questa equazione. Supponiamo che $\psi(x, c)$ sia la funzione di cui $\varphi(x, c)$ è il coefficiente differenziale rispetto ad x, e che $\chi(x, c)$ sia la funzione di cui $\frac{d\varphi(x, c)}{dc}$ è il coefficiente differenziale rispetto ad x; così (1) si può scrivere

$$\frac{d\psi(b, c)}{dc} - \frac{d\psi(a, c)}{dc} = \chi(b, c) - \chi(a, c) \ldots\ldots (2),$$

supponiamo che b non si trovi in $\varphi(x, c)$, e che a sia anche indipendente da b; allora (2) si può scrivere

$$\frac{d\psi(b, c)}{dc} + C = \chi(b, c) \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

in cui C dinota termini che sono indipendenti da b, cioè, sono costanti rispetto a b. Quindi siccome b può avere quel

valore che ci piace in (3), possiamo rimpiazzare b con x, e scrivere

$$\chi(x, c) = \frac{d\psi(x, c)}{dc} + C \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Questa equazione si può applicare per trovare $\chi(x, c)$; siccome la costante può essere introdotta se si vuole, possiamo dispensarci dallo scriverla, e porre (4) sotto la forma

$$\int \frac{d\varphi(x, c)}{dc} dx = \frac{d}{dc} \int \varphi(x, c)\, dx.$$

Per esempio, sia $\varphi(x, c) = \frac{1}{1 + c^2 x^2}$; allora

$$\int \varphi(x, c)\, dx = \int \frac{dx}{1 + c^2 x^2} = \frac{1}{c} \tan^{-1} cx,$$

così

$$\frac{d}{dc}\left(\frac{1}{c} \tan^{-1} cx\right) = \int \frac{d}{dc}\left(\frac{1}{1 + c^2 x^2}\right) dx.$$

$$= -\int \frac{2cx^2}{(1 + c^2 x^2)^2} dx.$$

Così dal conoscere il valore di $\int \frac{dx}{1 + c^2 x^2}$ possiamo dedurre con la differenziazione il valore dell' integrale più complicato $\int \frac{2cx^2}{(1 + c^2 x^2)^2} dx$.

216. Si cerchi il coefficiente differenziale di $\int_a^b \varphi(x, c)\, dx$ rispetto a c quando b ed a sono tutte e due funzioni di c. Si dinoti l' integrale con u; allora $\frac{du}{dc}$ consiste di tre termini, uno proveniente dal fatto che $\varphi(x, c)$ contiene c, uno dal fatto che b contiene c, ed uno dal fatto che a contiene c.

Quindi per gli articoli precedenti,

$$\frac{du}{dc}=\int_a^b \frac{d\varphi(x,c)}{dc}dx+\frac{du}{db}\frac{db}{dc}+\frac{du}{da}\frac{da}{dc}$$

$$=\int_a^b \frac{d\varphi(x,c)}{dc}dx+\varphi(b,c)\frac{db}{dc}-\varphi(a,c)\frac{da}{dc}.$$

217. Con le supposizioni dell'articolo precedente possiamo procedere a trovare $\frac{d^2u}{dc^2}$. Differenziando rispetto a c il termine $\int_a^b \frac{d\varphi(x,c)}{dc}dx$ otteniamo

$$\int_a^b \frac{d^2\varphi(x,c)}{dc^2}dx+\frac{d\varphi(b,c)}{dc}\frac{db}{dc}-\frac{d\varphi(a,c)}{dc}\frac{da}{dc}.$$

Dagli altri termini in $\frac{du}{dc}$ otteniamo con la differenziazione

$$\varphi(b,c)\frac{d^2b}{dc^2}+\frac{d\varphi(b,c)}{db}\left(\frac{db}{dc}\right)^2+\frac{d\varphi(b,c)}{dc}\frac{db}{dc}$$

$$-\varphi(a,c)\frac{d^2a}{dc^2}-\frac{d\varphi(a,c)}{da}\left(\frac{da}{dc}\right)^2-\frac{d\varphi(a,c)}{dc}\frac{da}{dc}.$$

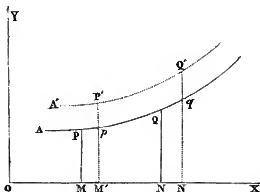
Così
$$\frac{d^2u}{dc^2}=\int_a^b \frac{d^2\varphi(x,c)}{dc^2}dx$$

$$+\varphi(b,c)\frac{d^2b}{dc^2}+\frac{d\varphi(b,c)}{db}\left(\frac{db}{dc}\right)^2+2\frac{d\varphi(b,c)}{dc}\frac{db}{dc}$$

$$-\varphi(a,c)\frac{d^2a}{dc^2}-\frac{d\varphi(a,c)}{da}\left(\frac{da}{dc}\right)^2-2\frac{d\varphi(a,c)}{dc}\frac{da}{dc}.$$

Similmente si possono trovare $\frac{d^3u}{dc^3}$ ed i coefficienti differenziali di ordine superiore di u.

218. Si può dare la seguente illustrazione geometrica dell'Art. 216.



Sia $y = \varphi(x, c)$ l'equazione della curva APQ, ed $y = \varphi(x, c + \Delta c)$ l'equazione della curva $A'P'Q'$.

Sia $$OM = a, \qquad ON = b,$$

$$MM' = \Delta a, \qquad NN' = \Delta b.$$

Allora u dinota l'area $PMNQ$, ed $u + \Delta u$ dinota l'area $P'M'N'Q'$. Quindi

$$\Delta u = P'pqQ' + QNN'q - PMM'p,$$

e $$\frac{\Delta u}{\Delta c} = \frac{P'pqQ'}{\Delta c} + \frac{QNN'q}{\Delta c} - \frac{PMM'p}{\Delta c}.$$

Si può vedere facilmente che il limite del primo termine è il limite di $\int_a^b \frac{\varphi(x, c + \Delta c) - \varphi(x, c)}{\Delta c} dx$, che il limite del secondo termine è il limite di $\varphi(b, c)\frac{\Delta b}{\Delta c}$, e che il limite del terzo termine è il limite di $\varphi(a, c)\frac{\Delta a}{\Delta c}$. Ciò dà il risultato dell'Art. 216.

219. *Esempio.* Trovare una curva tale che l'area tra la curva, l'asse delle x, ed un'ordinata qualunque, serbi un rapporto costante al rettangolo contenuto da quell'ordinata e dalla corrispondente ascissa.

Supponiamo che $\varphi(x)$ sia l'ordinata della curva per l'ascissa x; allora $\int_0^c \varphi(x)\,dx$ esprime l'area tra la curva, l'asse delle x, e l'ordinata $\varphi(c)$: quindi per la supposizione dobbiamo avere

$$\int_0^c \varphi(x)\,dx = \frac{c\varphi(c)}{n},$$

in cui n è una costante. Ciò deve valere per tutt' i valori di c; quindi possiamo differenziare rispetto a c; così

$$\varphi(c) = \frac{\varphi(c)}{n} + \frac{c\varphi'(c)}{n};$$

onde $$c\varphi'(c) = (n-1)\,\varphi(c),$$

e $$\frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)} = \frac{n-1}{c}.$$

Con l'integrazione $\log\varphi(c) = (n-1)\log c +$ costante;

così $$\varphi(c) = Ac^{n-1},$$

e $$\varphi(x) = Ax^{n-1},$$

che determina la curva richiesta.

220. Trovare la forma di $\varphi(x)$, in modo che per tutt' i valori di c

$$\frac{\int_0^c x\,\{\varphi(x)\}^2\,dx}{\int_0^c \{\varphi(x)\}^2\,dx} = \frac{c}{n}.$$

Per la supposizione

$$\int_0^c x\,\{\varphi(x)\}^2\,dx = \frac{c}{n}\int_0^c \{\varphi(x)\}^2\,dx.$$

Si differenzii rispetto a c; così

$$c\,\{\varphi(c)\}^2 = \frac{1}{n}\int_0^c \{\varphi(x)\}^2\,dx + \frac{c}{n}\,\{\varphi(c)\}^2;$$

così
$$c\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\varphi(c)\}^2 = \frac{1}{n}\int_0^c \{\varphi(x)\}^2\,dx.$$

Si differenzii di nuovo rispetto a c;

così
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\varphi(c)\}^2 + 2c\left(1-\frac{1}{n}\right)\varphi(c)\,\varphi'(c) = \frac{\{\varphi(c)\}^2}{n}$$

onde
$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\varphi(c) + 2c\left(1-\frac{1}{n}\right)\varphi'(c) = 0;$$

quindi
$$\frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)} = \frac{2-n}{2(n-1)}\,\frac{1}{c}.$$

S'integri; così

$$\log\varphi(c) = \frac{2-n}{2(n-1)}\log c + \text{costante};$$

onde
$$\varphi(c) = Ac^{\frac{2-n}{2(n-1)}};$$

in cui A è una costante; così abbiamo finalmente

$$\varphi(x) = Ax^{\frac{2-n}{2(n-1)}}.$$

Questa è la soluzione di un problema nella Statica Analitica, che si può enunciare così. La distanza del centro di gravità di un segmento di un solido di rotazione dal vertice è sempre $\frac{1}{n}$ ma parte dell'altezza del segmento; trovare la curva generatrice. La richiesta equazione è $y=\varphi(x)$.

221. Trovare la forma di $\varphi(x)$ sicchè l'integrale $\int_0^c \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{(c-x)}}$ sia indipendente da c.

Si dinoti l'integrale con u, e supponiamo $x=cz$; così

$$u = \int_0^c \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{(c-x)}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{c}\,\varphi(cz)\,dz}{\sqrt{(1-z)}}.$$

Poichè u deve essere indipendente da c, il coefficiente differenziale di u rispetto a c deve svanire. Ora

$$\frac{du}{dc}=\int_0^1 \frac{\frac{\varphi(cz)}{2\sqrt{c}}+z\sqrt{c}\,\varphi'(cz)}{\sqrt{(1-z)}}\,dz$$

$$=\int_0^c \frac{\varphi(x)+2x\varphi'(x)}{2c\sqrt{(c-x)}}\,dx.$$

Quest'ultimo integrale adunque deve svanire qualunque sia c; quindi dobbiamo avere

$$\varphi(x)+2x\varphi'(x)=0;$$

onde $$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=-\frac{1}{2x};$$

onde $$\log\varphi(x)=-\frac{1}{2}\log x+\text{costante},$$

onde $$\varphi(x)=\frac{A}{\sqrt{x}}.$$

Questa è la soluzione di un problema in Dinamica, che si può enunciare così. Trovare una curva, tale che il tempo della discesa per un arco della curva da un punto *qualunque* al punto infimo sia sempre lo stesso. Se s dinota l'arco della curva misurato dal punto infimo, x l'ascissa orizzontale dell'estremità di s, allora abbiamo

$$\frac{ds}{dx}=\varphi(x) \text{ ed } s=2A\sqrt{x};$$

sicchè la curva è una cicloide (Art. 72).

ESEMPII DIVERSI.

1. Se la linea retta $SP_1P_2P_3$ incontra tre spire successive di una spirale equiangola, la di cui equazione è $r=a^\theta$, nei punti P_1, P_2, P_3, trovare l'area racchiusa tra P_1P_2, P_2P_3, e le linee curve P_1P_2, P_2P_3.

Risultato. $\frac{1}{4\log_e a}(P_3P_1)^2$.

2. Trovare l'area della curva $y^4 - axy^2 + x^4 = 0$.

Risultato. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{16}$.

3. Trovare l'area della curva $x^{2n} + y^{2n} = a^2 (xy)^{n-1}$, in cui n è un intero positivo.

Risultato. Se n è un numero *pari* $\frac{a^2 \pi}{2n}$; se n è un numero *dispari* $\frac{a^2 \pi}{n}$.

4. Un filo la lunghezza del quale è eguale al perimetro di un'ovale è avvolto completamente intorno all'ovale, e si formi un'involuta svolgendo il filo, a cominciare da un punto qualunque; mostrare che quando la lunghezza dell'involuta è un massimo o un minimo la lunghezza del filo è eguale alla circonferenza del circolo di curvatura nel punto dal quale incomincia lo svolgimento.

5. Trovare la porzione del cilindro $x^2 + y^2 - rx = 0$ intercetta tra i piani

$$ax + by + cz = 0, \text{ ed } a'x + by + cz = 0.$$

Risultato. $\frac{\pi (a' - a) r^3}{8c}$.

6. Trovare il volume del solido limitato dal paraboloide $y^2 + z^2 = 4a(x + a)$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, supponendo c maggiore di a.

Risultato. $2\pi a \left(c^2 - \frac{a^2}{3}\right)$.

CAPITOLO X.

INTEGRALI ELLITTICI.

222. Gl'integrali $\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}}$, $\int \sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}\, d\theta$, ed $\int \frac{d\theta}{(1+a \operatorname{sen}^2 \theta)\sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}}$, si chiamano *funzioni ellittiche* o *integrali ellittici* del primo, secondo, e terzo ordine rispettivamente; il primo è dinotato con $F(c, \theta)$, il secondo con $E(c, \theta)$, ed il terzo con $\Pi(c, a, \theta)$. Gl'integrali si suppongono presi tutti tra i limiti 0 e θ, sicchè essi svaniscono con θ; θ si chiama l'*amplitudine* della funzione. La costante c è supposta minore dell'unità; essa si chiama il *modulo* della funzione. La costante a, che si trova nella funzione del terzo ordine, si chiama il *parametro*. Quando gl'integrali sono presi tra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$, essi si chiamano funzioni *complete;* cioè, l'*amplitudine* di una funzione completa è $\frac{\pi}{2}$.

223. Il secondo integrale ellittico esprime la lunghezza di una porzione dell'arco di un'ellisse misurato dall'estremità dell'asse minore, l'eccentricità dell'ellisse essendo il *modulo* della funzione. Da questa circostanza, e dal fatto che i tre integrali sono collegati per mezzo di rimarchevoli proprietà, è stato derivato il nome di *integrali ellittici*.

224. Il soggetto degl'*integrali ellittici* è molto esteso; daremo semplicemente alcuni dei più semplici risultati, e rimandiamo lo studente per più estese investigazioni all'*Integral Calculus* di Hymers, o agli scritti di Legendre, Jacobi ed Abel.

225. Se θ e φ sono legati dall'equazione

$$F(c, \theta) + F(c, \varphi) = F(c, \mu),$$

in cui μ è una costante; allora sarà

$$\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\mu)} = \cos\mu.$$

Si considerino θ e φ come funzioni di una nuova variabile t, e si differenzii l'equazione data; così

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta)}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\varphi)}}\frac{d\varphi}{dt} = 0 \ldots\ldots (1).$$

Ora siccome t è una nuova variabile arbitraria, siamo in libertà di prendere

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta)},$$

così dall'equazione (1)

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\varphi)}.$$

Si elevino a quadrato queste due equazioni e si differenzii; così

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -c^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -c^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi;$$

onde
$$\frac{d^2(\theta \pm \varphi)}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}(\operatorname{sen}2\theta \pm \operatorname{sen}2\varphi).$$

Sia $\theta + \varphi = \psi$ e $\theta - \varphi = \chi$; così

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -c^2\operatorname{sen}\psi\cos\chi, \qquad \frac{d^2\chi}{dt^2} = -c^2\operatorname{sen}\chi\cos\psi.$$

Inoltre
$$\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -c^2\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\chi;$$

onde $$\frac{\frac{d^2\psi}{dt^2}}{\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt}} = \cot\chi, \quad \frac{\frac{d^2\chi}{dt^2}}{\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt}} = \cot\psi;$$

onde

$$\frac{d}{dt}\left(\log\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\log\operatorname{sen}\chi, \quad \frac{d}{dt}\left(\log\frac{d\chi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\log\operatorname{sen}\psi;$$

onde $$\log\frac{d\psi}{dt} = \log\operatorname{sen}\chi + \text{costante},$$

quindi $$\frac{d\psi}{dt} = A\operatorname{sen}\chi$$

e similmente $$\frac{d\chi}{dt} = B\operatorname{sen}\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

in cui A e B sono costanti.

Quindi $$A\operatorname{sen}\chi\frac{d\chi}{dt} = B\operatorname{sen}\psi\frac{d\psi}{dt},$$

onde $$A\cos\chi = B\cos\psi + C \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ora dalla data equazione originale vediamo che se $\varphi = 0$

$$F(c, \theta) = F(c, \mu);$$

onde allora $$\theta = \mu \text{ e } \chi = \psi = \mu;$$

così da (3) $$(A - B)\cos\mu = C;$$

così $$A\cos(\theta - \varphi) = B\cos(\theta + \varphi) + (A - B)\cos\mu;$$

qnindi

$$(A - B)\cos\theta\cos\varphi + (A + B)\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi = (A - B)\cos\mu \ldots (4).$$

In (2) si ponga per $\frac{d\psi}{dt}$ il suo valore

$$\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta)} - \sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\varphi)},$$

e per $\frac{d\chi}{dt}$ il suo valore

$$\sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} + \sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)},$$

e poi si supponga $\varphi = 0$; così

$$\sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \mu)} - 1 = A \operatorname{sen} \mu,$$

e $$\sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \mu)} + 1 = B \operatorname{sen} \mu.$$

Si sostituiscano i valori di $A - B$ ed $A + B$ in (4);

così $$\cos\theta \cos\varphi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \mu)} = \cos\mu.$$

226. La relazione ora trovata si può mettere sotto una forma diversa. Si liberi l'equazione dai radicali; così

$$(\cos\theta \cos\varphi - \cos\mu)^2 = (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu) \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi;$$

onde

$$\cos^2\theta + \cos^2\varphi + \cos^2\mu - 2\cos\theta\cos\varphi\cos\mu$$
$$= 1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Si aggiunga $\cos^2\varphi \cos^2\mu$ ai due lati e si trasponga; così

$$(\cos\theta - \cos\varphi\cos\mu)^2$$
$$= 1 - \cos^2\varphi - \cos^2\mu + \cos^2\varphi\cos^2\mu - c^2 \operatorname{sen}^2\mu \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi$$
$$= \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\mu (1 - c^2 \operatorname{sen}^2\theta);$$

quindi $$\cos\theta = \cos\varphi\cos\mu + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\mu \sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2\theta)}.$$

Si è preso il segno positivo del radicale, poichè quando $\theta = 0$, dobbiamo avere $\varphi = \mu$.

227. Mostreremo ora come una funzione ellittica del primo ordine si può far dipendere da un'altra con un modulo differente.

Dinoti $F(c, \theta)$ la funzione; si prenda

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{c + \cos 2\varphi};$$

onde
$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2(1+c\cos 2\varphi)}{(c+\cos 2\varphi)^2},$$

quindi
$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2(1+c\cos 2\varphi)}{1+2c\cos 2\varphi + c^2}.$$

Ed
$$1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{c^2\operatorname{sen}^2 2\varphi}{1+2c\cos 2\varphi + c^2}$$
$$= \frac{1+2c\cos 2\varphi + c^2\cos^2 2\varphi}{1+2c\cos 2\varphi + c^2};$$

quindi
$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\theta)}} = \int \frac{2(1+c\cos 2\varphi)}{1+2c\cos 2\varphi + c^2}\cdot\frac{\sqrt{(1+2c\cos 2\varphi + c^2)}}{1+c\cos 2\varphi}\,d\varphi$$
$$= 2\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1+2c\cos 2\varphi + c^2)}} = \frac{2}{1+c}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left\{1 - \frac{4c}{(1+c)^2}\operatorname{sen}^2\varphi\right\}}}.$$

Non si aggiunge costante, poichè φ svanisce con θ. Così $F(c,\theta) = \frac{2}{1+c}F(c_1,\varphi)$, in cui

$$c_1{}^2 = \frac{4c}{(1+c)^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{c+\cos 2\varphi}.$$

L'ultima relazione si può scrivere così;

$$c\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(2\varphi - \theta).$$

Possiamo notare che c_1 è maggiore di c, poichè

$$\frac{c_1{}^2}{c^2} = \frac{4}{c(1+c)^2},$$

e poichè c è minore dell'unità, 4 è maggiore di $c(1+c)^2$.

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, allora $\theta = \pi$; così

$$\frac{2}{1+c}F\left(c_1,\frac{\pi}{2}\right) = F(c,\pi) = 2F\left(c,\frac{\pi}{2}\right).$$

228. Daremo ancora una proposizione su questo soggetto, con lo stabilire una relazione tra le funzioni ellittiche del secondo ordine, analoga a quella dimostrata nell'Art. 225 per le funzioni del primo ordine.

Se $\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\mu)} = \cos\mu$,

allora sarà

$$E(c,\theta) + E(c,\varphi) - E(c,\mu) = c^2 \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\mu.$$

In virtù dell'equazione data che lega le amplitudini, φ è una funzione di θ; così possiamo supporre

$$E(c,\theta) + E(c,\varphi) - E(c,\mu) = f(\theta).$$

Si differenzii; così

$$f'(\theta) = \sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\theta)} + \sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\varphi)}\frac{d\varphi}{d\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - \cos\varphi\cos\mu}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\mu} + \frac{\cos\varphi - \cos\theta\cos\mu}{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\mu}\frac{d\varphi}{d\theta}$$

(per l'Art. 226),

$$= \frac{d\{\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi + 2\cos\theta\cos\varphi\cos\mu\}}{d\theta} \times \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\mu}.$$

Ma $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi + 2\cos\theta\cos\varphi\cos\mu$

$$= 1 + \cos^2\mu + c^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\mu;$$

così

$$f'(\theta) = c^2\operatorname{sen}\mu\frac{d(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)}{d\theta}.$$

Quindi, con l'integrazione,

$$f(\theta) = c^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\mu.$$

Non si aggiunge costante, poichè $f(\theta)$ evidentemente svanisce con θ.

ESEMPII DIVERSI.

1. Trovare l'intero volume del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$z^2 = \frac{2axy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - (x^2+y^2).$$

Risultato. $\frac{\pi a^3}{6}$; supponendo il radicale ristretto al segno positivo.

2. Trovare l'intero volume del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Risultato. $\frac{4\pi abc}{35}$.

3. Dimostrare che il volume di quella porzione del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$x^2 z + ay^2 = z\,(a^2 - z^2),$$

che giace dalla parte positiva del piano delle xy è $\frac{8\pi a^3}{21}$.

4. Trovare il valore di $\int \frac{dS}{r^n}$, in cui dS dinota l'elemento della superficie di una sfera, ed r la distanza di questo elemento da un punto fisso fuori della sfera; l'integrazione essendo estesa su tutta la superficie della sfera.

Risultato. $\frac{2\pi a}{c\,(n-2)}\left\{\frac{1}{(c-a)^{n-2}} - \frac{1}{(c+a)^{n-2}}\right\}$; in cui a è il raggio della sfera, e c la distanza del punto fisso dal centro della sfera.

5. Un cilindro è costruito sopra un solo cappio della curva $r = a\cos n\theta$ avendo le sue generatrici perpendicolari al piano di questa curva; determinare l'area della porzione della superficie della sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$

intercettata dal cilindro; determinare ancora il volume del cilindro intercettato dalla sfera.

Risultati. L'arca $=\frac{4a^2}{n}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$;

il volume $=\frac{4a^3}{3n}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

6. Trovare il volume del solido generato dalla rotazione della parte chiusa della curva

$$x^3-3axy+y^3=0$$

intorno alla linea $x+y=0$. *Risultato.* $\frac{8\pi^2a^3}{3\sqrt{6}}$.

7. Se gli assi di due cilindri circolari eguali di raggio a s'intersegano sotto un angolo β, il volume comune ad entrambi è $\frac{16}{3}\frac{a^3}{\operatorname{sen}\beta}$; e la superficie di ciascuno intercettata dall'altro è $\frac{8a^2}{\operatorname{sen}\beta}$.

8. Il centro di un circolo variabile si muove lungo l'arco di un circolo fisso; il suo piano è normale al circolo fisso, ed il suo raggio eguale alla distanza del suo centro da un diametro fisso; trovare il volume generato; e se il solido così formato gira intorno al diametro fisso, mostrare che il volume attraversato sta al volume del solido come 5 a 2.

9. Il centro di un esagono regolare si muove lungo un diametro di un circolo dato (raggio $=a$), il piano dell'esagono essendo perpendicolare a questo diametro e la sua grandezza variando in modo che una delle sue diagonali coincida sempre con una corda del circolo; mostrare che il volume del solido generato è $2\sqrt{3}a^3$. Mostrare ancora che la superficie del solido è

$$a^2(2\pi+3\sqrt{3}).$$

10. Dimostrare che

$$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{2}{3a}F\left(c,\frac{\pi}{2}\right),\text{ in cui } c=\frac{1}{3}.$$

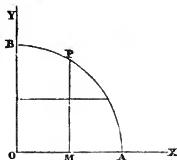
CAPITOLO XI.

CAMBIAMENTO DELLE VARIABILI IN UN INTEGRALE MULTIPLO.

229. Abbiamo veduto nell' Art. 62 che il doppio integrale $\int_a^b\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\,dx\,dy$ è eguale ad $\int_\alpha^\beta\int_a^b \varphi(x,y)\,dy\,dx$ quando i *limiti sono costanti*, cioè, un cambiamento nell' *ordine* dell' integrazione non produce alcun cambiamento nei limiti delle due integrazioni. Ma quando i limiti della prima integrazione sono funzioni dell' altra variabile, questa proprietà non ha più luogo, come abbiamo veduto in diversi esempii nei capitoli settimo ed ottavo. Diamo quì per aggiunta alcuni pochi esempii.

230. Cambiare l' ordine dell' integrazione in

$$\int_0^a\int_0^{\sqrt{(a^2-x^2)}} \varphi(x,y)\,dx\,dy.$$



I limiti dell' integrazione rispetto ad y sono quì $y=0$ ed $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$; cioè, possiamo considerare che l' integrale si

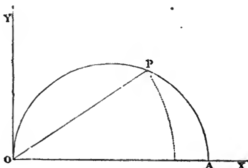
estenda dall'asse delle x al contorno di un circolo, che ha il centro nell'origine, ed il raggio eguale ad a. Allora l'integrazione rispetto ad x si estende dall'asse delle y all'estremo punto A del quadrante. Così se consideriamo $z = \varphi(x, y)$ come l'equazione di una superficie, il precedente doppio integrale rappresenta il volume di quel solido che è contenuto tra la superficie, il piano delle (x, y), ed una linea che si muove perpendicolarmente a questo piano lungo il contorno $OAPBO$.

È quindi chiaro dalla figura che se prima si eseguo l'integrazione rispetto ad x, i limiti saranno $x=0$ ed $x=\sqrt{(a^2-y^2)}$, e poi i limiti di y saranno $y=0$ ed $y=a$. Così l'integrale trasformato è

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{(a^2-y^2)}} \varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

231. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \varphi(r, \theta)\, r d\theta\, dr.$$



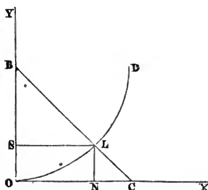
Sia $OA = 2a$, e si descriva un semicircolo sopra OA come diametro. Sia $POX = \theta$, allora $OP = 2a\cos\theta$. Così il doppio integrale si può considerare come il limite della somma dei valori di $\varphi(r, \theta)\, r\, \Delta\theta\, \Delta r$ su tutta l'area del semicircolo. Quindi quando si cambia l'ordine dobbiamo integrare per θ da 0 sino a $\cos^{-1}\dfrac{r}{2a}$, e per r da 0 a $2a$.

Così l'integrale trasformato è

$$\int_0^{2a}\int_0^{\cos^{-1}\frac{r}{2a}} \varphi(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

232. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^{2a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} \varphi(x,y)\, dx\, dy.$$



L'integrazione per y è presa da $y=\frac{x^2}{4a}$ ad $y=3a-x$. L'equazione $y=\frac{x^2}{4a}$ appartiene ad una parabola OLD, ed $y=3a-x$ ad una linea retta BLC, che passa per L, l'estremità del lato retto della parabola.

Così l'integrazione si può considerare come estesa sull'area $OLBSO$. Ora si muti l'ordine dell'integrazione; dovremo considerare separatamente gli spazii OLS e BLS. Per lo spazio OLS dobbiamo integrare da $x=0$ ad $x=2\sqrt{(ay)}$, e poi da $y=0$ ad $y=a$; e per lo spazio BLS dobbiamo integrare da $x=0$ ad $x=3a-y$, e poi da $y=a$ ad $y=3a$. Così l'integrale tra formato è

$$\int_0^a\int_0^{2\sqrt{(ay)}} \varphi(x\ y)\, dy\, dx + \int_a^{3a}\int_0^{3a-y} \varphi(x,y)\, dy\, dx.$$

233. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^1 \int_x^{x(2-x)} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Qui l'integraziono rispetto ad y è presa da $y = x$ sino ad $y = x(2-x)$. L'equazione $y = x$ rappresenta una linea retta, ed $y = x(2-x)$ rappresenta una parabola. Il lettore troverà esaminando una figura, che l'integrale trasformato è

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{(1-y)}}^{y} \varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

234. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^a \int_{\sqrt{(a^2-x^2)}}^{x+2a} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

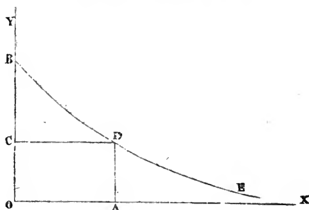
Qui l'integrazione rispetto ad y è presa da $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ad $y = x + 2a$. L'equazione $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ rappresenta un circolo, ed $y = x + 2a$ rappresenta una linea retta. Il lettore troverà esaminando una figura, che quando si esegue prima l'integrazione rispetto ad x, l'integrale deve essere separato in tre porzioni; l'integrale trasformato è

$$\int_0^a \int_{\sqrt{(a^2-y^2)}}^{a} \varphi(x, y)\, dy\, dx + \int_a^{2a} \int_0^a \varphi(x, y)\, dy\, dx$$
$$+ \int_{2a}^{3a} \int_{y-2a}^{a} \varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

235. Cambiare l'ordine dell'integrazione in.

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{b+x}} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Qui l'integrazione rispetto ad y è presa da $y = 0$ ad $y = \frac{b}{b+x}$. L'equazione $y = \frac{b}{b+x}$ rappresenta un' iperbole; sia BDE questa iperbole, e sia $OA = a$. Allora l'integrazione si può considerare come estesa sullo spazio $OBDA$. Si muti



l'ordine dell'integrazione; dovremo allora considerare separatamente gli spazii $OADC$ e CDB. Per lo spazio $OADC$ dobbiamo integrare da $x=0$ ad $x=a$, e poi da $y=0$ ad $y=\frac{b}{b+a}$. Per lo spazio CDB dobbiamo integrare da $x=0$ ad $x=\frac{b(1-y)}{y}$, e poi da $y=\frac{b}{b+a}$ ad $y=1$. Così l'integrale trasformato è

$$\int_0^{\frac{b}{b+a}}\int_0^a \varphi(x,y)\,dy\,dx+\int_{\frac{b}{b+a}}^1\int_0^{\frac{b(1-y)}{y}} \varphi(x,y)\,dy\,dx.$$

236. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^h\int_{\lambda x}^{c-\mu x} \varphi(x,y)\,dx\,dy,$$

in cui $h=\frac{c}{\lambda+\mu}$. L'integrale trasformato è

$$\int_0^{\lambda h}\int_0^{\frac{y}{\lambda}} \varphi(x,y)\,dy\,dx+\int_{\lambda h}^c\int_0^{\frac{c-y}{\mu}} \varphi(x,y)\,dy\,dx.$$

237. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^y \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Qui l'integrazione si può considerare essere estesa per una piramide, ed i piani che la limitano sono dati dalle equazioni

$$z = 0,\ z = y,\ y = x,\ x = a.$$

L'integrale si può trasformare in diversi modi, e così otteniamo

$$\int_0^a \int_y^a \int_0^y \varphi(x, y, z)\, dy\, dx\, dz,$$

o

$$\int_0^a \int_0^y \int_y^a \varphi(x, y, z)\, dy\, dz\, dx,$$

o

$$\int_0^a \int_z^a \int_y^a \varphi(x, y, z)\, dz\, dy\, dx,$$

o

$$\int_0^a \int_0^x \int_z^x \varphi(x, y, z)\, dx\, dz\, dy,$$

o

$$\int_0^a \int_z^a \int_z^x \varphi(x, y, z)\, dz\, dx\, dy.$$

Queste trasformazioni si possono verificare ponendo per $\varphi(x, y, z)$ qualche funzione semplice, così che gl'integrali si possano attualmente ottenere; per esempio, se rimpiazziamo $\varphi(x, y, z)$ con l'unità troviamo $\frac{a^3}{6}$ come il valore di una qualunque delle sei forme.

238. Questi esempii illustreranno sufficientemente il soggetto; non è possibile di dare delle regole semplici per scoprire i limiti dell'integrale trasformato. Non è assolutamente necessario di tracciare delle figure come abbiamo fatto, poichè le figure non danno alcuna informazione che non si potesse ottenere riflettendo sui differenti valori che le variabili debbono avere, per fare che l'integrazione si estenda sullo spazio indicato dai dati limiti. Ma le figure aiutano materialmente per arrivare al risultato prontamente e correttamente.

Procediamo ora al problema che è propriamente l'oggetto del presente capitolo, cioè, il cambiamento delle variabili in un integrale *multiplo*. Incominciamo dal caso di un integrale *doppio*.

239. Il problema da risolvere è il seguente. Si voglia trasformare il doppio integrale $\iint V\,dx\,dy$, in cui V è una funzione di x ed y, in un altro doppio integrale nel quale le variabili sono u e v, le antiche e le nuove variabili essendo legate dalle equazioni

$$\varphi_1(x, y, u, v) = 0, \quad \varphi_2(x, y, u, v) = 0 \;\ldots\ldots (1).$$

Supponiamo che l'integrale primitivo debba prendersi tra limiti conosciuti di y ed x; siccome integriamo prima rispetto ad y, i limiti di y possono essere funzioni di x. Naturalmente integrando rispetto ad y si riguarda x come costante.

Trasformiamo prima l'integrale rispetto ad y in un integrale rispetto a v. Ciò teoreticamente è molto semplice; dalle equazioni (1) si elimini u ed otteniamo y come una funzione di x e v, sia

$$y = \psi(x, v) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

dalla quale si ha

$$dy = \psi'(x, v)\,dv,$$

in cui $\psi'(x, v)$ dinota il coefficiente differenziale di $\psi(x, v)$ rispetto a v.

Si sostituiscano allora y e dy in $\int V\,dy$, ed otteniamo $\int V_1 \psi'(x, v)\,dv$, in cui V_1 è ciocchè diviene V quando poniamo in V per y il suo valore. Quindi il doppio integrale primitivo diviene

$$\iint V_1 \psi'(x, v)\,dx\,dv.$$

Così abbiamo eliminata y e presa invece v. Siccome i valori limiti di y tra i quali dovevamo primitivamente inte-

grare sono conosciuti, potremo da (2) conoscere i valori limiti di v, tra i quali dobbiamo integrare. Si osserverà, che nel trovare $\frac{dy}{dv}$ da (2), si suppose x costante; si fa così perchè, come già si è osservato, quando integriamo l'espressione proposta rispetto ad y dobbiamo considerare x costante.

Il passo seguente consiste nel cambiare l'*ordine* delle predette integrazioni rispetto ad x e v, cioè, eseguire *prima* l'integrazione rispetto ad x. Questo è un soggetto che abbiamo già esaminato; non si deve far altro che determinare convenientemente i *nuovi limiti*. Così supponendo stabilito questo punto, abbiamo cambiata l'espressione primitiva in

$$\iint V_1 \psi'(x, v)\, dv\, dx.$$

Rimane ad eliminare la x da questa espressione e rimpiazzarla con u. Procediamo precisamente come sopra. Dalle equazioni (1) si elimini y, ed otteniamo x come una funzione di v ed u, sia

$$x = \chi(v, u) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

dalla quale si ha

$$dx = \chi'(v, u)\, du$$

in cui $\chi'(v, u)$ dinota il coefficiente differenziale di $\chi(v, u)$ rispetto ad u.

Si sostituiscano allora x e dx, ed il doppio integrale diviene

$$\iint V' \psi'(x, v)\, \chi'(v, u)\, dv\, du,$$

in cui V' è ciocchè diviene V_1 quando si pone in V_1 per x il suo valore. Così il doppio integrale contiene ora solamente u e v, poichè per la x che si trova in $\psi'(x, v)$ supponiamo sostituito il suo valore, cioè, $\chi(v, u)$. Inoltre poichè i limiti tra i quali si doveva prendere l'integrazione rispetto ad x sono stati già stabiliti, conosciamo i limiti tra i quali deve prendersi l'integrazione rispetto ad u.

Abbiamo dato così la completa soluzione *teoretica* del problema; rimane solamente ad aggiungere un metodo *pratico* per determinare $\psi'(x, v)$ e $\chi'(v, u)$; a questo ora procediamo.

Osserviamo che $\psi'(x, v)$ o $\frac{dy}{dv}$ deve trovarsi dalle equazioni (1) eliminando u, considerando x costante; ciò che segue vale esattamente lo stesso; da (1)

$$\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{d\varphi_1}{du}\frac{du}{dv} + \frac{d\varphi_1}{dv} = 0,$$
$$\frac{d\varphi_2}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{d\varphi_2}{du}\frac{du}{dv} + \frac{d\varphi_2}{dv} = 0.$$

Si elimini $\frac{du}{dv}$; così

$$\frac{\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{d\varphi_1}{dv}}{\frac{d\varphi_1}{du}} = \frac{\frac{d\varphi_2}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{d\varphi_2}{dv}}{\frac{d\varphi_2}{du}},$$

onde

$$\frac{dy}{dv} = \frac{\frac{d\varphi_1}{dv}\frac{d\varphi_2}{du} - \frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dv}}{\frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{du}}.$$

Questo adunque è equivalente a $\psi'(x, v)$, supponendo che dopo eseguite le differenziazioni si pongano per y ed u i loro valori in termini di x e v da (1).

Di nuovo, $\chi'(v, u)$ o $\frac{dx}{du}$ deve trovarsi dalle equazioni (1) eliminando y, riguardando v come costante; ciò che segue vale esattamente lo stesso; da (1)

$$\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{d\varphi_1}{du} = 0,$$
$$\frac{d\varphi_2}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_2}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{d\varphi_2}{du} = 0.$$

Da queste equazioni eliminando $\frac{dy}{du}$ troviamo

$$\frac{dx}{du}=\frac{\frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dy}-\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{du}}{\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dx}-\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy}}.$$

Questo adunque è equivalente a $\chi'(v, u)$.

Così $$\psi'(x, v)\,\chi'(v, u)=\frac{\frac{d\varphi_1}{dv}\frac{d\varphi_2}{du}-\frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dv}}{\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dx}-\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy}}.$$

Quindi la conclusione si è che

$$\iint V\,dx\,dy=\iint V\,\frac{\frac{d\varphi_1}{dv}\frac{d\varphi_2}{du}-\frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dv}}{\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dx}-\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy}}\,dv\,du \;\ldots\ldots\ldots (4),$$

in cui dopo eseguite le differenziazioni, dobbiamo porre per x ed y i loro valori in termini di u e v da trovarsi da (1); anche i valori di x e y debbono sostituirsi in V.

Un importante caso particolare si è quello in cui x ed y sono date *esplicitamente* come funzioni di u e v; le equazioni (1) prendono allora la forma

$$x-f_1(u, v)=0, \qquad y-f_2(u, v)=0 \;\ldots\ldots\ldots (5).$$

Quì $$\frac{d\varphi_1}{dx}=1,\ \frac{d\varphi_1}{dy}=0,\ \frac{d\varphi_2}{dx}=0,\ \frac{d\varphi_2}{dy}=1,$$

e l'integrale trasformato diviene

$$\iint V\left(\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv}-\frac{df_1}{dv}\frac{df_2}{du}\right)dv\,du,$$

in cui dobbiamo sostituire in V per x ed y i loro valori da (5).

Così possiamo scrivere

$$\iint V\,dx\,dy = \iint V\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) dv\,du \ldots (6).$$

Le formole in (4) e (6) sono quelle che si danno ordinariamente; esse contengono una soluzione semplice del problema proposto in quei casi in cui i limiti delle nuove integrazioni sono manifesti. Ma in alcuni esempii la difficoltà di determinare i limiti delle nuove integrazioni sarà molto grande, e per assicurare un risultato corretto sarà necessario invece di usare queste formole, di procedere precisamente nel modo indicato nella teoria, togliendo una per volta ciascuna delle antiche variabili.

240. Ciò che segue è un esempio.

Si voglia trasformare $\int_0^a \int_0^b V\,dx\,dy$, essendo dato

$$y + x = u, \qquad y = uv.$$

Dalle equazioni date abbiamo

$$x = u(1 - v), \qquad y = uv;$$

così $\quad \frac{dx}{du} = 1 - v, \quad \frac{dx}{dv} = -u, \quad \frac{dy}{du} = v, \quad \frac{dy}{dv} = u;$

onde $\quad \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} = u(1 - v) + uv = u.$

Quindi dall'equazione (6) dell'Art. 239, abbiamo

$$\int_0^a \int_0^b V\,dx\,dy = \iint Vu\,dv\,du;$$

ma non abbiamo determinato i limiti delle integrazioni rispetto ad u e v, sicchè il risultato è di poco valore. Risolveremo ora questo esempio seguendo i passi indicati nella teoria data precedentemente.

Dalle date equazioni che legano le antiche e le nuove variabili eliminiamo u; così abbiamo

$$y = \frac{vx}{1-v}, \quad \text{onde} \quad \frac{dy}{dv} = \frac{x}{(1-v)^2};$$

ai limiti $y = 0$ ed $y = b$, corrispondono rispettivamente $v = 0$ e $v = \frac{b}{b+x}$; così

$$\int_0^a \int_0^b V\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{b+x}} V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dx\,dv.$$

Dobbiamo ora cambiare l'*ordine* dell'integrazione in

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{b+x}} V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dx\,dv.$$

Questa quistione è stata risoluta nell'Art. 235; quindi otteniamo

$$\int_0^a \int_0^b V\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{b+x}} V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dx\,dv$$

$$= \int_0^{\frac{b}{b+a}} \int_0^a V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dv\,dx + \int_{\frac{b}{b+a}}^1 \int_0^{\frac{b(1-v)}{v}} V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dv\,dx.$$

Dobbiamo ora cambiare x per u dove

$$x = u\,(1-v), \qquad \frac{dx}{du} = 1 - v;$$

così otteniamo

$$\int_0^{\frac{b}{b+a}} \int_0^{\frac{a}{1-v}} V'\,u\,dv\,du + \int_{\frac{b}{a+b}}^1 \int_0^{\frac{b}{v}} V'\,u\,dv\,du,$$

poichè ai limiti 0 ed a per x corrispondono rispettivamente 0 ed $\frac{a}{1-v}$ per u, ed ai limiti 0 e $\frac{b\,(1-v)}{v}$ per x corrispondono rispettivamente 0 e $\frac{b}{v}$ per u.

Se $a = b$ l'integrale trasformato diviene

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{a}{1-v}} V'u\,dv\,du + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{\frac{a}{v}} V'u\,dv\,du.$$

Se a è infinito, questi due termini si riuniscono nella sola espressione

$$\int_0^1\int_0^{\infty} V'u\,dv\,du.$$

241. *Secondo Esempio.* Si voglia trasformare

$$\int_0^c\int_0^{c-x} V\,dx\,dy,$$

essendo dato $y + x = u, y = uv$.

Si esegua l'intera operazione come sopra; sicchè poniamo

$$y = \frac{vx}{1-v} \text{ e } \frac{dy}{dv} = \frac{x}{(1-v)^2}.$$

Quando $y = 0$ abbiamo $v = 0$, e quando $y = c - x$ abbiamo $v = \frac{c-x}{c}$. Così l'integrale si trasforma in

$$\int_0^c\int_0^{\frac{c-x}{c}} V_1 x\,(1-v)^{-2}\,dx\,dv.$$

Si muti ora l'ordine dell'integrazione; così otteniamo

$$\int_0^1\int_0^{c(1-v)} V_1 x\,(1-v)^{-2}\,dv\,dx.$$

Ora si ponga $x = u\,(1-v)$ e $\frac{dx}{du} = 1 - v$; i limiti di u saranno 0 e c. Quindi abbiamo finalmente per l'integrale trasformato

$$\int_0^1\int_0^c V'u\,dv\,du.$$

242. *Terzo Esempio.* Trasformare $\iint V\,dx\,dy$ in un doppio integrale con le variabili r e θ, supponendo

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Possiamo porre θ per v ed r per u nelle formole generali; così

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r;$$

e l'integrale trasformato è

$$\iint V' r\,d\theta\,dr.$$

Questa è una trasformazione con la quale lo studente probabilmente è già familiare; i limiti naturalmente si debbono prendere in modo che ogni elemento che entra nell'integrale primitivo si trovi anche nell'integrale trasformato.

Si può notare un caso particolare di questo esempio. Supponiamo che l'integrale sia

$$\iint \varphi\,(ax + by)\,dx\,dy;$$

con la presente trasformazione questo diviene

$$\iint \varphi\,\{kr\cos(\theta - \alpha)\}\,r\,d\theta\,dr.$$

in cui $k\cos\alpha = a$ e $k\,\mathrm{sen}\,\alpha = b$. Ora si ponga $\theta - \alpha = \theta'$, sicchè l'integrale diventa

$$\iint \varphi\,(kr\cos\theta')\,r\,d\theta'\,dr;$$

allora si supponga $r\cos\theta' = x'$ ed $r\,\mathrm{sen}\,\theta' = y'$ e l'integrale si può cambiare di nuovo in

$$\iint \varphi\,(kx')\,dx'\,dy'.$$

Così togliendo gli accenti possiamo scrivere

$$\iint \varphi(ax+by)\,dx\,dy = \iint \varphi(kx)\,dx\,dy,$$

in cui $k=\sqrt{(a^2+b^2)}$. I limiti saranno generalmente diversi nei due integrali; quelli a dritta debbono essere determinati con un esame speciale, corrispondenti ai dati limiti a sinistra.

243. *Quarto Esempio.* Trasformare $\int_0^c\int_0^x V\,dx\,dy$, essendo dato

$$x=au+bv, \qquad y=bu+av, \qquad a>b.$$

Si elimini u, così $ay-bx=(a^2-b^2)v$, e la prima trasformazione dà

$$\frac{a^2-b^2}{a}\int_0^c\int_{-\frac{bx}{a^2-b^2}}^{\frac{x}{a+b}} V_1\,dx\,dv,$$

in cui V_1 è ciò che diviene V quando si pone $\frac{bx}{a}+\frac{a^2-b^2}{a}v$ per y. In seguito si muti l'ordine dell'integrazione; ciò dà

$$\frac{a^2-b^2}{a}\int_0^{\frac{c}{a+b}}\int_{(a+b)v}^{c} V_1\,dv\,dx + \frac{a^2-b^2}{a}\int_{-\frac{bc}{a^2-b^2}}^{0}\int_{-\frac{a^2-b^2}{b}v}^{c} V_1\,dv\,dx.$$

Dobbiamo ora passare da x ad u per mezzo dell'equazione $x=au+bv$, che dà $\frac{dx}{du}=a$; i limiti di u corrispondenti ai limiti conosciuti di x si determinano facilmente.

Così abbiamo finalmente per l'integrale trasformato

$$(a^2-b^2)\int_0^{\frac{c}{a+b}}\int_v^{\frac{c-bv}{a}} V'\,dv\,du + (a^2-b^2)\int_{-\frac{bc}{a^2-b^2}}^{0}\int_{-\frac{av}{b}}^{\frac{c-bv}{a}} V'\,dv\,du.$$

L'esattezza della trasformazione si può verificare supponendo che V sia qualche funzione semplice di x ed y; per

esempio, se V è l'unità, il valore dell'integrale primitivo come del trasformato è $\frac{c^2}{2}$.

244. *Quinto Esempio.* L'area di una superficie è data dall'integrale

$$\iint dx\,dy \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}} \qquad \text{(Art. 170)};$$

si voglia trasformarlo in un integrale rispetto a θ e φ, essendo dato

$$z = r\cos\theta, \qquad x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi.$$

Dall'equazione nota della superficie z è data in termini di x ed y; quindi sostituendo abbiamo un'equazione che dà r in termini di θ e φ.

Troveremo prima la trasformazione per $dx\,dy$:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi - r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi.$$

Quindi $\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta} = r\,\text{sen}\,\theta\left(r\cos\theta + \frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\right)$;

così $dx\,dy$ sarà rimpiazzato da

$$r\,\text{sen}\,\theta\left(r\cos\theta + \frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\right)d\varphi\,d\theta.$$

Dobbiamo in seguito trasformare

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}.$$

Abbiamo
$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\theta}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\theta},$$
$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varphi}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\varphi}.$$

Inoltre
$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta;$$
$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{dr}{d\varphi}\cos\theta.$$

Così $\frac{dz}{dx}$ è una frazione di cui il numeratore è
$$\frac{dz}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi}-\frac{dz}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta},$$

cioè,
$$\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{dr}{d\varphi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi+r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right)$$
$$-\frac{dr}{d\varphi}\cos\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi+r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\right),$$

cioè,
$$-r\operatorname{sen}\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\frac{dr}{d\theta}-r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi,$$

ed il denominatore è
$$\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi}-\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta},$$

di cui il valore fu trovato sopra; così
$$\frac{dz}{dx}=\frac{r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi}{r\operatorname{sen}\theta\left(r\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}\right)}.$$

Similmente
$$\frac{dz}{dy}=\frac{r\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{dr}{d\theta}-r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi}{r\operatorname{sen}\theta\left(r\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}\right)};$$

onde

$$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=\frac{r^4\,\text{sen}^2\theta+r^2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\,\text{sen}^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2\,\text{sen}^2\theta\left(r\cos\theta+\text{sen}\,\theta\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

e finalmente l'integrale trasformato è

$$\iint\sqrt{\left\{r^2\,\text{sen}^2\theta+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\text{sen}^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\,r\,d\varphi\,d\theta.$$

245. Non vi sarà difficoltà ora nella trasformazione di un integrale triplo. Supponiamo che V sia una funzione di x,y,z, e che $\iiint V\,dx\,dy\,dz$ debba trasformarsi in un integrale triplo rispetto a tre nuove variabili u, v, w, che sono legate ad x, y, z da tre equazioni. Dall'investigazione dell'Art. 239, possiamo prevedere che il risultato prenderà la sua forma più semplice quando le antiche variabili sono date esplicitamente in termini delle nuove. Supponiamo adunque

$$x=f_1(u,v,w),\ y=f_2(u,v,w),\ z=f_3(u,v,w)\ldots(1).$$

Trasformiamo prima l'integrale rispetto a z in un integrale rispetto a w. Durante l'integrazione per z riguardiamo x ed y come costanti; teoreticamente allora dovremmo da (1) esprimere z come una funzione di x, y, e w, eliminando u, e v; dovremmo poi trovare il coefficiente differenziale di z rispetto a w riguardando x ed y come costanti. Ma possiamo ottenere il risultato richiesto differenziando le equazioni (1) come esse sono, così

$$\frac{df_1}{du}\frac{du}{dw}+\frac{df_1}{dv}\frac{dv}{dw}+\frac{df_1}{dw}=0,$$

$$\frac{df_2}{du}\frac{du}{dw}+\frac{df_2}{dv}\frac{dv}{dw}+\frac{df_2}{dw}=0,$$

$$\frac{df_3}{du}\frac{du}{dw}+\frac{df_3}{dv}\frac{dv}{dw}+\frac{df_3}{dw}=\frac{dz}{dw}.$$

Si eliminino $\frac{du}{dw}$ e $\frac{dv}{dw}$; così troviamo

$$\frac{dz}{dw} = \frac{N}{\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}},$$

in cui

$$N = \frac{df_3}{dw}\left(\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}\right) + \frac{df_1}{dw}\left(\frac{df_2}{du}\frac{df_3}{dv} - \frac{df_3}{du}\frac{df_2}{dv}\right)$$
$$+ \frac{df_2}{dw}\left(\frac{df_3}{du}\frac{df_1}{dv} - \frac{df_1}{du}\frac{df_3}{dv}\right).$$

Quindi l'integrale si trasforma in

$$\iiint V_1 \frac{N}{\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}}\, dx\, dy\, dw,$$

in cui V_1 dinota ciò che diviene V quando si sostituisce per z il suo valore in termini di x, y e w. Dobbiamo inoltre determinare i limiti di w dai dati limiti di z. In seguito dobbiamo cambiare l'ordine dell'integrazione per y e w, e quindi procedere come sopra a togliere y ed introdurre v. Allora dovremmo di nuovo cambiare l'ordine dell'integrazione per w ed x e poi per v ed x, e finalmente togliere x ed introdurre u. E negli esempii gioverà procedere passo a passo, per ottenere i limiti dell'integrale trasformato.

Nondimeno possiamo pervenire più semplicemente alla formola finale nel seguente modo. Si trasformi l'integrale rispetto a z in un integrale rispetto a w come sopra; indi si muti due volte l'ordine dell'integrazione, sicchè abbiamo

$$\iiint V_1 \frac{N}{\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}}\, dw\, dx\, dy.$$

Ora dobbiamo trasformare il doppio integrale rispetto ad x ed y in un doppio integrale rispetto ad u e v per mezzo delle prime due delle equazioni (1). Quindi conosciamo per l'Art. 239 che il simbolo $dx\,dy$ sarà rimpiazzato da

$$\left(\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}\right) dv\, du;$$

e l'integrale finalmente si trasforma in

$$\iiint V' N \, dw \, dv \, du,$$

in cui V' è ciò che diviene V quando per x, y e z, si sostituiscono i loro valori in termini di u, v, e w.

Lo studente non avrà ora alcuna difficoltà nell'investigare il caso più complicato, in cui le antiche e le nuove variabili sono legate da equazioni della forma

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 (x, y, z, u, v, w) = 0 \\ \varphi_2 (x, y, z, u, v, w) = 0 \\ \varphi_3 (x, y, z, u, v, w) = 0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (2).$$

Qui si troverà che

$$\frac{dz}{dw} = \frac{N_1}{D_1}, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{N_2}{D_2}, \quad \frac{dx}{du} = \frac{N_3}{D_3};$$

inoltre che $\qquad N_2 = D_1$, ed $N_3 = D_2$.

Così $\qquad \iiint V \, dx \, dy \, dz = \iiint V' \frac{N_1}{D_3} du \, dv \, dw$, in cui

$$N_1 = \frac{d\varphi_1}{dw}\left(\frac{d\varphi_2}{du}\frac{d\varphi_3}{dv} - \frac{d\varphi_3}{du}\frac{d\varphi_2}{dv}\right) + \frac{d\varphi_2}{dw}\left(\frac{d\varphi_3}{du}\frac{d\varphi_1}{dv} - \frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_3}{dv}\right)$$
$$+ \frac{d\varphi_3}{dw}\left(\frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dv} - \frac{d\varphi_2}{du}\frac{d\varphi_1}{dv}\right),$$

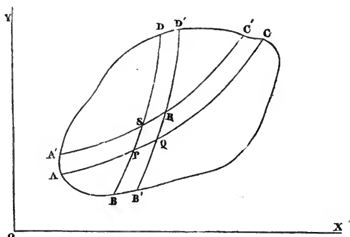
e $-D_3$ è eguale ad una simile espressione con x, y, z invece di u, v, w rispettivamente.

Può accadere che le equazioni (2) impongano qualche restrizione intorno al modo nel quale le trasformazioni debbono essere effettuate. Per esempio supponiamo che si abbia

$$x + y + z - u = 0, \quad x + y - uv = 0, \quad y - uvw = 0.$$

Da queste equazioni non possiamo esprimere z in termini di w ed x ed y, e quindi non possiamo incominciare dal trasformare da z a w. Possiamo però incominciare dal trasformare da z ad u o da z a v; o pure possiamo incominciare dal trasformare da x o y ad u o v o w.

246. Può essere instruttivo di illustrare queste trasformazioni geometricamente. Incominciamo con l'integrale doppio.



Sia $\iint V\,dx\,dy$ un integrale doppio, che si debba prendere per tutti i valori di x ed y compresi dentro il contorno $ABCD$. Supponiamo le variabili x ed y legate alle due nuove variabili u e v dalle equazioni

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v) \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Da queste equazioni siano trovate u e v in termini di x ed y, sicchè possiamo scrivere

$$u = F_1(x, y), \quad v = F_2(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora attribuendo un valore costante qualunque ad u la prima delle equazioni (2) si può considerare come rappresentante una curva, e dando successivamente diversi valori costanti ad u, abbiamo una serie di tali curve. Sia adunque $APQC$ una curva, in ogni punto della quale $F_1(x, y)$ ha un certo valore costante u; e sia $A'SRC'$ una curva, in ogni punto della quale $F_1(x, y)$ ha un certo valore costante $u + \delta u$. Similmente sia $BPSD$ una curva, in ogni punto della quale $F_2(x, y)$ ha un certo valore costante v; e sia

$B'QRD'$ una curva, in ogni punto della quale $F_2(x, y)$ ha un certo valore costante $v + \delta v$. Dinotino ora x, y le coordinate di P; procederemo ad esprimere le coordinate di Q, S, ed R.

Le coordinate di Q si trovano da quelle di P, cambiando v in $v + \delta v$; quindi da (1) esse sono ultimamente, quando δv è indefinitamente piccolo,

$$x + \frac{dx}{dv}\delta v, \text{ ed } y + \frac{dy}{dv}\delta v.$$

Similmente le coordinate di S si trovano da quelle di P cambiando u in $u + \delta u$; quindi da (1) esse sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{du}\delta u, \text{ ed } y + \frac{dy}{du}\delta u.$$

Le coordinate di R si trovano da quelle di P cambiando insieme u in $u + \delta u$ e v in $v + \delta v$; quindi da (1) esse sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{du}\delta u + \frac{dx}{dv}\delta v, \text{ ed } y + \frac{dy}{du}\delta u + \frac{dy}{dv}\delta v.$$

Questi risultati mostrano che P, Q, R, S sono ultimamente situati ai vertici di un parallelogrammo. L'area di questo parallelogrammo si può prendere senza errore nel limite per l'area della figura curvilinea $PQRS$. L'espressione per l'area del triangolo PQR in termini delle coordinate dei suoi vertici è conosciuta (dalla *Geometria analitica*), e l'area del parallelogrammo è il doppio di quella del triangolo. Quindi abbiamo ultimamente per l'area di $PQRS$ l'espressione

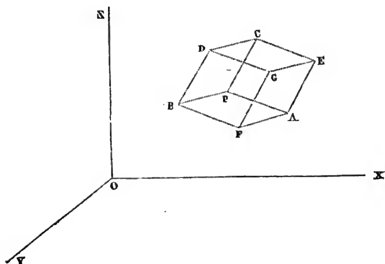
$$\pm\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\delta u\,\delta v.$$

Così è chiaro che l'integrale $\iint V\,dx\,dy$ si può rimpiazzare con

$$\pm\iint V'\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)du\,dv;$$

l'ambiguità del segno sparirà in un esempio nel quale si conoscano i limiti dell'integrazione. Nel trovare il valore dell'integrale trasformato, possiamo supporre che s'integri prima rispetto a v, sicchè u sia tenuta costante; ciò equivale a prendere tutti gli elementi come $PQRS$, che formano una striscia come $AA'C'C$. Allora l'integrazione rispetto ad u equivale a prendere tutte le striscie come $AA'C'C$ che sono contenute dentro al contorno assegnato $ABCD$.

247. Procediamo ad illustrare geometricamente la trasformazione di un integrale triplo.



Sia $\iiint V\,dx\,dy\,dz$ un integrale triplo, che debba essere preso per tutt'i valori di x, y, e z compresi tra limiti assegnati. Supponiamo le variabili x, y, e z legate con tre nuove variabili u, v, w dalle equazioni

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w) \text{ ..... } (1).$$

Da queste equazioni siano trovate u, v, e w in termini di x, y, e z, sicchè possiamo scrivere

$$u = F_1(x, y, z), \quad v = F_2(x, y, z) \quad w = F_3(x, y, z) \text{ ..... } (2).$$

Ora attribuendo un valore costante qualunque ad u, la prima delle equazioni (2) si può considerare come rappresentante una superficie, e dando successivamente diversi valori costanti ad u abbiamo una serie di superficie. Supponiamo esservi una superficie in ogni punto della quale $F_1(x, y, z)$ abbia il valore costante u, e siano i quattro punti P, B, D, C su questa superficie; inoltre supponiamo esservi una superficie in ogni punto della quale $F_1(x, y, z)$ abbia il valore costante $u + \delta u$, e siano i quattro punti A, F, G, E in questa superficie. Similmente si suppongano P, A, E, C sulla superficie in ogni punto della quale $F_2(x, y, z)$ ha il valore costante v, e B, D, G, F sulla superficie in ogni punto della quale $F_2(x, y, z)$ ha il valore costante $v + \delta v$. Finalmente si suppongano P, A, F, B sulla superficie in ogni punto della quale $F_3(x, y, z)$ ha il valore costante w, e C, D, G, E sulla superficie in ogni punto della quale $F_3(x, y, z)$ ha il valore costante $w + \delta w$.

Dinotino ora x, y, z le coordinate di P; procederemo ad esprimere le coordinate degli altri punti. Le coordinate di A si trovano da quelle di P cambiando u in $u + \delta u$; quindi da (1) esse sono ultimamente quando δu è indefinitamente piccolo,

$$x + \frac{dx}{du}\delta u, \quad y + \frac{dy}{du}\delta u, \quad z + \frac{dz}{du}\delta u.$$

Le coordinate di B si trovano da quelle di P cambiando v in $v + \delta v$; quindi da (1) esse sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{dv}\delta v, \quad y + \frac{dy}{dv}\delta v, \quad z + \frac{dz}{dv}\delta v.$$

Similmente le coordinate di C sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{dw}\delta w, \quad y + \frac{dy}{dw}\delta w, \quad z + \frac{dz}{dw}\delta w.$$

Le coordinate di D si trovano da quelle di P cambiando v in $v + \delta v$, e w in $w + \delta w$; quindi da (1) esse sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{dv}\delta v + \frac{dx}{dw}\delta w, \quad y + \frac{dy}{dv}\delta v + \frac{dy}{dw}\delta w, \quad z + \frac{dz}{dv}\delta v + \frac{dz}{dw}\delta w.$$

Similmente si possono trovare le coordinate di E, F e G.

Questi risultati mostrano che P, A, B, C, D, E, F, G sono ultimamente situati ai vertici di un parallelepipedo; ed il volume di questo parallelepipedo si può prendere senza errore nel limite per il volume del solido limitato dalle sei superficie di cui abbiamo parlato. Ora per un noto teorema il volume di un tetraedro si può esprimere in termini delle coordinate dei suoi vertici, ed il volume del parallelepipedo PG è sei volte quello del tetraedro $ABPC$. Quindi abbiamo finalmente per il volume del parallelepipedo

$$\pm\left\{\frac{dx}{du}\left(\frac{dy}{dv}\frac{dz}{dw}-\frac{dy}{dw}\frac{dz}{dv}\right)+\frac{dy}{du}\left(\frac{dz}{dv}\frac{dx}{dw}-\frac{dz}{dw}\frac{dx}{dv}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{dz}{du}\left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dw}-\frac{dx}{dw}\frac{dy}{du}\right)\right\}\delta u\,\delta v\,\delta w=\pm N\delta u\,\delta v\,\delta w \text{ poniamo.}$$

Quindi il triplo integrale si trasforma in

$$\pm\iiint V' N\,du\,dv\,dw;$$

l'ambiguità nel segno sparirà in un esempio in cui si conoscano i limiti dell'integrazione.

248. Abbiamo dato ora la teoria della trasformazione degl'integrali doppii e tripli; il punto essenziale nella nostra investigazione si è, che abbiamo mostrato come togliere le antiche variabili e rimpiazzarle con le nuove variabili *una alla volta*. Raccomandiamo allo studente di porre attenzione su questo punto, poichè crediamo che in tal modo la teoria del soggetto è resa chiara e semplice, e nello stesso tempo si possono più facilmente determinare i limiti dell'integrale trasformato. Non riguardiamo essenziali le *illustrazioni* geometriche nei due articoli precedenti; esse richiedono molto maggiore sviluppo prima che si possano accettare come rigorose *dimostrazioni*.

249. Prima di lasciare l'argomento indicheremo brevemente il metodo che prima si adoperava per risolvere il problema. Non abbiamo messo innanzi questo metodo a preferenza, in parte perchè non dà alcun mezzo per determi-

nare i nuovi limiti, ed in parte per la sua oscurità; quest'ultimo difetto è stato spesso notato dagli scrittori sull'oggetto.

Supponiamo che $\iint Vdxdy$ debba trasformarsi in un integrale rispetto a due nuove variabili u e v di cui le antiche variabili sono note funzioni.

Siano sottoposte le variabili a cangiamenti infinitesimi: così

$$dx = \frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora nell'espressione primitiva $Vdxdy$ nel formare dx supponiamo y *costante*, cioè, $dy = 0$; quindi (2) diviene

$$0 = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

si trovi da questa dv e si sostituisca in (1); così

$$dx = \frac{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}{\frac{dy}{dv}}du \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Inoltre, nel formare dy in $Vdxdy$ supponiamo x costante, cioè, $dx = 0$; quindi per (4) dobbiamo supporre $du = 0$; così da (2)

$$dy = \frac{dy}{dv}dv \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Da (4) e (5)

$$dx\,dy = \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)du\,dv\,;$$

ed $\iint V dx\,dy$ diviene

$$\iint V'\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)du\,dv.$$

2. 28

Rispetto ai limiti dell'integrazione possiamo dare solamente la regola generale, che i nuovi limiti debbono essere presi in modo da includere ogni elemento che era incluso dai limiti antichi.

250. Similmente nel trasformare un integrale triplo

$$\iiint V\,dx\,dy\,dz$$

si procedeva come segue. Siano le nuove variabili u, v, w; nel formare dz dobbiamo supporre x ed y costanti; così abbiamo

$$dz = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv + \frac{dz}{dw}dw,$$

$$0 = \frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv + \frac{dx}{dw}dw,$$

$$0 = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dy}{dw}dw,$$

così

$$dz = \frac{N dw}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

in cui N ha lo stesso valore come nell'Art. 247.

In seguito formando dy dobbiamo riguardare x e z come costanti; quindi da (1) dobbiamo riguardare w come costante; così abbiamo

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv,$$

$$0 = \frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv;$$

onde

$$dy = \frac{\left(\frac{dy}{dv}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dv}\right)dv}{\frac{dx}{du}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

E finalmente nel formare dx supponiamo y e z costanti, cioè, per (1) e (2) supponiamo w e v costanti; così

$$dx = \frac{dx}{du} du \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Da (1), (2), e (3)

$$dx\, dy\, dz = N du\, dv\, dw.$$

251. Lo studente che desidera studiare la storia di questo soggetto può trarre partito dalle opere seguenti. Lacroix, *Calcul Diff. et Intégral*, Vol. II, p. 205; ancora le indicazioni delle più antiche autorità si troveranno nella pagina XI, della tavola annessa a questo volume. De Morgan, *Diff. and Integral Calculus*, p. 392. Moigno, *Calcul Diff. et Intégral*, Vol. II. p. 214; Ostrogradsky, *Mémoires de l'Académie de St Pétersbourg*, Sixième Série, 1838, p. 401. Catalan, *Mémoires Couronnés par l'Académie...de Bruxelles*, Vol. XIV. p. 1. Boole, *Cambridge Mathematical Journal*, Vol. IV. p. 20. Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, Vol. IV. p. 128. Svanberg, *Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis*, Vol. XIII. 1847, p. 1. De Morgan, *Transactions of the Cambridge Phil. Society*, Vol. IX. p. [133].

ESEMPII.

1. Mostrare che se $x = a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$ ed $y = b \cos \theta \operatorname{sen} \varphi$, l'integrale doppio $\iint dx\, dy$ si trasforma in

$$\pm \iint ab \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

2. Se $x = u \operatorname{sen} \alpha + v \cos \alpha$ ed $y = u \cos \alpha - v \operatorname{sen} \alpha$, dimostrare che

$$\iint f(x, y) \frac{dx\, dy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}} = \iint f_1(u, v) \frac{du\, dv}{\sqrt{(1 - u^2 - v^2)}}.$$

3. Dimostrare che

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi\,(a^2x^2+b^2y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty \varphi\,(x)\,dx.$$

4. Trasformare $\iint V dx\,dy$, in cui $y = xu$ ed $x = \frac{v}{1+u}$.

Se i limiti di y sono 0 ed x ed i limiti di x sono 0 ed a, trovare i limiti dell'integrale trasformato.

Risultato. $\int_0^1\int_0^{a\,(1+u)} V' v\,(1+u)^{-2}\,du\,dv.$

5. Trasformare $\iint e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy$ da coordinate rettangolari a polari, e quindi mostrare che se i limiti sì di x che di y sono zero e l'infinito, il valore dell'integrale sarà $\frac{\alpha}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}$.

6. Trasformare $\int_0^a\int_0^b \varphi\,(x,y)\,dx\,dy$ in coordinate polari, ed indicare i limiti per ciascun ordine nell' integralo trasformato.

Mostrare che

$$\int_0^a\int_0^b \frac{dx\,dy}{(c^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

7. Applicare la trasformazione da coordinate rettangolari a polari negl'integrali doppii a mostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\,dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\,(x^2+y^2+a'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{a+a'}.$$

8. Trasformare l'integrale doppio $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ in uno nel

quale r e θ siano le variabili indipendenti, essendo dato

$$x = r\cos\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta + a\cos\theta.$$

Risultato.

$$\iint f(r\cos\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta + a\cos\theta)\ (a\,\mathrm{sen}\,2\theta - r)\,d\theta\,dr.$$

9. Trasformare $\iint e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ in un integrale doppio in cui r e t sono le variabili indipendenti essendo $\frac{y}{x} = t$ ed $r^2 = x^2 + y^2$; e se i limiti di x ed y siano per ciascuna 0 ed ∞, trovare i limiti di r e t.

$$\textit{Risultato.} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-r^2}\,r\,dr\,dt}{1+t^2}.$$

10. Se x ed y sono date come funzioni di r e θ, trasformare l'integrale $\iiint dx\,dy\,dz$ in un altro in cui le variabili sono r, θ e z; e se $x = r\cos\theta$ ed $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, trovare il volume racchiuso dalle quattro superficie di cui le equazioni sono $r = a$, $z = 0$, $\theta = 0$, e $z = mr\cos\theta$.

$$\textit{Risultato.}\quad \text{Il volume} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2 m\cos\theta\,d\theta\,dr = \frac{ma^3}{3}.$$

11. Se $\alpha x = yz$, $\beta y = zx$, $\gamma z = xy$, mostrare che

$$\iiint f(\alpha, \beta, \gamma)\,d\alpha d\beta d\gamma = 4\iiint f\left(\frac{yz}{x},\ \frac{zx}{y},\ \frac{xy}{z}\right)dx\,dy\,dz.$$

12. Trasformare $\iiiint V\,dx_1\,dx_2\,d_3\,dx_4$ in r, θ, φ e ψ essendo

$$x_1 = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, \qquad x_3 = r\cos\theta\cos\psi,$$

$$x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad x_4 = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\psi.$$

$$\textit{Risultato.}\ \iiiint V'\,r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,d\psi.$$

13. Trovare l' area elementare racchiusa tra le curve $\varphi(x, y) = u$, $\psi(x, y) = v$, e le curve che si ottengono dando ai parametri u e v incrementi indefinitamente piccoli.

Trovare l'area racchiusa tra una parabola e le tangenti nelle estremità del lato retto dividendo l'area con una serie di parabole che toccano queste tangenti e con una serie di rette condotte per l'intersezione delle tangenti.

14. Trasformare l'integrale triplo $\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ in uno nel quale le variabili indipendenti sono r, y, z, essendo dato $\psi(x, y, z, r) = 0$; e cambiare le variabili nel suddetto integrale da x, y, z ad r, θ, φ, essendo dato

$$\psi(x, y, z, r) = 0,\ \ \psi_1(y, z, r, \theta) = 0,\ \ \psi_2(z, r, \theta, \varphi) = 0.$$

Risultato. $$-\iiint \frac{\dfrac{d\psi}{dr}\dfrac{d\psi_1}{d\theta}\dfrac{d\psi_2}{d\varphi}}{\dfrac{d\psi}{dx}\dfrac{d\psi_1}{dy}\dfrac{d\psi_2}{dz}} f_1(r, \theta, \varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

15. Trasformare l'integrale doppio

$$\iint dx\, dy \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}},$$

in cui x, y, z sono legate dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, in un integrale in termini di θ e φ, avendo queste relazioni,

$$x = \operatorname{sen}\varphi \sqrt{(1 - m^2 \operatorname{sen}^2\theta)}, \qquad y = \cos\theta \cos\varphi,$$

$$z = \operatorname{sen}\theta \sqrt{(1 - n^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}, \qquad m^2 + n^2 = 1.$$

Quindi dimostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2\cos^2\theta + n^2\cos^2\varphi}{\sqrt{(1 - m^2\operatorname{sen}^2\theta)}\sqrt{(1 - n^2\operatorname{sen}^2\varphi)}}\, d\theta\, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

16. Trasformare l'integrale $\iiint dx\,dy\,dz$ in r, θ, φ, essendo

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \sqrt{(1 - n^2 \cos^2 \theta)}, \qquad y = r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta,$$
$$z = r \cos \theta \sqrt{(\cos^2 \varphi + n^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)},$$

Risultato. $\displaystyle\iiint \frac{r^2 \{(n^2 - 1) \cos^2 \varphi - n^2 \operatorname{sen}^2 \theta\}\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{(1 - n^2 \cos^2 \theta)} \sqrt{(\cos^2 \varphi + n^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}$.

17. Trasformare l'espressione $\displaystyle\iint \frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\varphi$ per un volume, in coordinate rettangolari.

Risultato. $\displaystyle\frac{1}{3}\iint (z - px - qy)\, dx\, dy$; questo dovrebbe interpetrarsi geometricamente.

18. Se $x + y + z = u$, $x + y = uv$, $y = uvw$, dimostrare che

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty V\, dx\, dy\, dz = \int_0^\infty\int_0^1\int_0^1 V\, u^2 v\, du\, dv\, dw.$$

19. Se
$$x_1 = r \cos \theta_1,$$
$$x_2 = r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2,$$
$$x_3 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1},$$
$$x_n = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \theta_{n-1},$$

mostrare che $\displaystyle\iiint \ldots\ldots V\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$

$$= \pm \iiint \ldots\ldots V'\, r^{n-1} (\operatorname{sen} \theta_1)^{n-2} (\operatorname{sen} \theta_2)^{n-3}$$
$$\ldots\ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2}\, dr\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots\ldots d\theta_{n-1},$$

in cui V è una funzione qualunque di $x_1, x_2 \ldots x_n$, e V' ciò che diviene questa funzione quando si cangiano le variabili.

CAPITOLO XII.

INTEGRALI DEFINITI.

252. Quando si conosce l'integrale indefinito di una funzione, possiamo ottenere immediatamente il valore dell'*integrale definito* corrispondente a limiti assegnati della variabile. Alle volte però possiamo assegnare con metodi speciali il valore di un integrale *definito* mentre non possiamo esprimere l'integrale indefinito in una forma finita; alle volte senza trovare attualmente il valore di un integrale definito possiamo mostrare che esso possiede proprietà importanti. In alcuni casi nei quali si può trovare l'integrale indefinito di una funzione, l'integrale definito tra certi limiti può avere un valore degno di nota, per la forma semplice nella quale può essere espresso. In questo capitolo daremo esempii di queste indicazioni generali.

Si può osservare che una collezione dei risultati conosciuti rispetto agl'Integrali Definiti è stata pubblicata in un volume in quarto ad Amsterdam, da D. Bierens de Haan, sotto il titolo di *Tables d'Intégrales Définies.*

253. Supponiamo $f(x)$ ed $F(x)$ funzioni algebriche razionali di x, ed $f(x)$ di grado inferiore ad $F(x)$, e supponiamo che l'equazione $F(x) = 0$ non abbia radici reali; si cerca il valore di

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx.$$

Si vedrà che per le supposizioni precedenti, l'espressione da integrarsi non diviene mai infinita per valori reali di x.

Rappresenti $\alpha + \beta \sqrt{(-1)}$ ed $\alpha - \beta \sqrt{(-1)}$ una coppia di radici immaginarie di $F(x)=0$; allora la frazione quadratica corrispondente della serie nella quale si può decomporre $\frac{f(x)}{F(x)}$, si può rappresentare con

$$\frac{2A(x-\alpha)+2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

le costanti A e B essendo date dall'equazione

$$A - B\sqrt{(-1)} = \frac{f\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}}{F'\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}} \quad \text{(Art. 21).}$$

Ora
$$\int \frac{2B\beta\, dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 2B \tan^{-1}\frac{x-\alpha}{\beta},$$

quindi
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2B\beta\, dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 2B\pi.$$

Inoltre
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)\, dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,dt}{t^2+\beta^2},$$

ed è chiaro che l'ultimo integrale tra i limiti assegnati è zero, poichè la parte negativa è numericamente eguale alla parte positiva. Così $2B\pi$ rappresenta la parte dell'integrale corrispondente alla coppia di radici immaginarie che si considera.

Se quindi si suppone $F(x)$ del grado $2n$, e che $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$ siano gli n termini di cui abbiamo preso B come tipo, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = 2\pi\{B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_n\}.$$

254. Come un esempio dell'articolo precedente prendiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\, dx}{1+x^{2n}},$$

in cui m ed n sono interi positivi, ed m minore di n. Qui

$$A - B\sqrt{(-1)} = \frac{1}{2n\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}^{2n-2m-1}},$$

e si conosce per la teoria delle equazioni che i valori di $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$ si ottengono dall'espressione

$$\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2r+1)\pi}{2n}.$$

dando ad r successivamente i valori $0, 1, 2, \ldots\ldots$ sino ad $n-1$.

Così, pel teorema di Demoivre,

$$\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}^{2n-2m-1}=\cos\varphi+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

in cui

$$\varphi=(2n-2m-1)\frac{(2r+1)\pi}{2n}=(2r+1)\pi-(2r+1)\frac{(2m+1)\pi}{2n};$$

sicchè

$$\cos\varphi+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,\varphi=-\cos(2r+1)\theta+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,(2r+1)\theta,$$

in cui $$\theta=\frac{2m+1}{2n}\pi.$$

Quindi

$$A-B\sqrt{(-1)}=\frac{1}{2n}\frac{1}{-\cos(2r+1)\theta+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,(2r+1)\theta}$$

$$=-\frac{\cos(2r+1)\theta+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,(2r+1)\theta}{2n}.$$

onde $$B=\frac{\mathrm{sen}\,(2r+1)\theta}{2n}.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{n}\{\,\mathrm{sen}\,\theta+\mathrm{sen}\,3\theta+\mathrm{sen}\,5\theta+\ldots+\mathrm{sen}\,(2n-1)\theta\,\}.$$

La somma della serie di seni si dimostra nelle opere sulla Trigonometria essere $\frac{\mathrm{sen}^2 n\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$, e nel caso attuale $n\theta=\frac{2m+1}{2}\pi$, sicchè $\mathrm{sen}^2 n\theta=1$. Adunque

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{n\,\mathrm{sen}\,\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

È chiaro che $\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$ è la metà del risultato precedente, cioè

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

255. Nell'ultima formola dell'articolo precedente si ponga $x^{2n}=y$, e si supponga $\frac{2m+1}{2n}=k$; così otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Questo risultato vale quando k ha un valore qualunque compreso tra 0 ed 1. Poichè la sola restrizione sugl'interi positivi m ed n si è che m deve essere minore di n, e quindi scegliendo convenientemente m ed n possiamo rendere $\frac{2m+1}{2n}$ eguale ad una frazione propria assegnata qualunque che ha un denominatore *pari* quando è ridotta a minimi termini. E sebbene non si possa rendere $\frac{2m+1}{2n}$ *esattamente* eguale ad una frazione che ha un denominatore *dispari* quando è ridotta a minimi termini, pure possiamo farla differire da una tale frazione per una quantità tanto piccola quanto ci piace, e così dedurre il risultato richiesto.

Nell'ultimo risultato si ponga x^r per y, in cui r è una quantità positiva qualunque; così

$$\int_0^\infty \frac{r x^{kr-r} x^{r-1}\,dx}{1+x^r} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi},$$

cioè,

$$\int_0^\infty \frac{x^{kr-1}\,dx}{1+x^r} = \frac{\pi}{r \operatorname{sen} k\pi}.$$

Sia $kr=s$; così

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^r} = \frac{\pi}{r \operatorname{sen} \frac{s}{r}\pi}.$$

La sola restrizione sulle quantità positive r ed s si è che s deve essere minore di r.

Lo studente probabilmente non troverà alcuna seria difficoltà nel metodo che abbiamo indicato per dimostrare la verità dell'equazione (1) quando k è una frazione che ha un denominatore *dispari* allorchè è ridotta a minimi termini; nonpertanto si possono fare alcune poche osservazioni che stabiliranno la proposizione decisivamente, e che serviranno anche come utili esercizii sull'argomento del presente capitolo.

Sia $$u = \int_0^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y};\ \text{allora}$$

$$u = \int_0^1 \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y} + \int_1^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y};$$

e ponendo $\frac{1}{z}$ per y troviamo che

$$\int_1^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y} = \int_0^1 \frac{z^{-k}\,dz}{1+z};\ \text{così}$$

$$u = \int_0^1 \frac{y^{k-1}+y^{-k}}{1+y}\,dy.$$

Quindi $$\frac{du}{dk} = \int_0^1 \frac{\log y}{1+y}\left(y^{k-1}-y^{-k}\right)dy \,\ldots\ldots\ldots (2).$$

L'equazione (2) mostra che $\frac{du}{dk}$ è negativo se $y^{k-1}-y^{-k}$ è costantemente positivo, e positivo se $y^{k-1}-y^{-k}$ è costantemente negativo, tra i limiti 0 ed 1 per y. Quindi $\frac{du}{dk}$ è negativo o positivo secondo che k è minore o maggiore di $\frac{1}{2}$. Così u diminuisce quando k cresce da 0 ad $\frac{1}{2}$, ed u cresce quando k cresce da $\frac{1}{2}$ ad 1.

Ora dinoti $\frac{\alpha}{\beta}$ una frazione ridotta a minimi termini, in cui β è un intero dispari; e sia p un intero pari. Sia $k_1 = \frac{p\alpha - 1}{p\beta}$, e $k_3 = \frac{p\alpha + 1}{p\beta}$, e k_2 dinoti $\frac{\alpha}{\beta}$. Siano u_1, u_2, u_3 i valori di $\int_0^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y}$ quando per k si sostituiscono k_1, k_2, k_3 rispettivamente. Allora dall'equazione (1)

$$u_1 = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k_1 \pi} \text{ ed } u_3 = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k_3 \pi}.$$

Ora possiamo prendere p tanto grande in modo che k_1 e k_2 siano entrambi maggiori o entrambi minori di $\frac{1}{2}$; ed allora per ciò che si è dedotto dall'equazione (2) ne segue che u_2 deve giacere numericamente tra u_1 ed u_3. Così la differenza tra u_2 ed u_1 o u_3 deve essere minore della differenza tra u_1 ed u_3; e quindi *a fortiori* la differenza tra u_2 e $\frac{\pi}{\operatorname{sen} k_2 \pi}$ deve essere minore della differenza tra u_1 ed u_3. Quindi siccome p può crescere indefinitamente abbiamo finalmente $u_2 = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k_2 \pi}$.

Integrali Euleriani.

256. L'integrale definito

$$\int_0^1 x^{l-1} (1-x)^{m-1}\, dx$$

si chiama il *primo integrale Euleriano;* lo dinoteremo col simbolo $B(l, m)$.

L'integrale definito

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx.$$

si chiama il *secondo integrale Euleriano;* è dinotato dal simbolo $\Gamma(n)$.

Daremo ora alcune delle proprietà di questi integrali; le costanti in questi integrali, che abbiamo indicate con l, m, n, si suppongono *positive* in tutto ciò che segue.

257. Nel primo integrale Euleriano si ponga $x = 1 - z$;

così $$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx = \int_0^1 z^{m-1}(1-z)^{l-1}\,dz;$$

questo mostra che le costanti l ed m si possono scambiare senza alterare il valore dell'integrale; cioè,

$$B(l, m) = B(m, l).$$

Di più nel primo integrale Euleriano si ponga $x = \frac{y}{1+y}$;

così $$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{l-1}\,dy}{(1+y)^{l+m}}.$$

Nello stesso integrale si ponga $x = \frac{1}{1+y}$; così

$$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}\,dy}{(1+y)^{l+m}}.$$

258. Sia $e^{-x} = y$, sicchè $x = \log\frac{1}{y}$; allora abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy,$$

che dà per conseguenza un'altra forma di $\Gamma(n)$.

259. Abbiamo con l'integrazione per parti

$$\int e^{-x}x^n\,dx = -e^{-x}x^n + n\int e^{-x}x^{n-1}\,dx;$$

ed $e^{-x}x^n$ svanisce quando $x = 0$, ed anche quando $x = \infty$. (Si vegga *Cal. Dif.* Art. 153); così

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx;$$

cioè $$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Poichè $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$ abbiamo $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$; cioè,

$$\Gamma(1) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Da (1) e (2) vediamo che se n è un intero

$$\Gamma(n+1) = \lfloor n.$$

Quando n non è un intero possiamo con l'uso ripetuto dell'equazione (1) far dipendere il valore di $\Gamma(n)$ in cui n è maggiore dell'unità da quello di $\Gamma(m)$ in cui m è minore dell'unità.

260. Ponendo $kx = z$ abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{n-1}\,dx = \frac{1}{k^n}\int_0^\infty e^{-z}\,z^{n-1}\,dz = \frac{\Gamma(n)}{k^n}.$$

261. Dimostreremo ora un'equazione importante che lega i due integrali Euleriani.

S'integri il doppio integrale $\int_0^\infty\int_0^\infty x^{l+m-1}\,y^{m-1}\,e^{-(1+y)x}\,dy\,dx$

prima rispetto ad x; otteniamo così, per l'Art. 260.

$$\Gamma(l+m)\int_0^\infty \frac{y^{m-1}dy}{(1+y)^{l+m}}.$$

Inoltre s'integri lo stesso doppio integrale prima rispetto ad y; otteniamo così

$$\Gamma(m)\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,x^{l+m-1}}{x^m}\,dx,$$

cioè,
$$\Gamma(m)\int_0^\infty e^{-x}\,x^{l-1}\,dx,$$

cioè,
$$\Gamma(m)\;\Gamma(l).$$

Quindi
$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}\,dy}{(1+y)^{l+m}} = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}.$$

Quindi, per l'Art. 257,

$$B(l,m) = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}.$$

262. Nel risultato dell'articolo precedente, supponiamo $l + m = 1$; così, se m è minore dell'unità,

$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y} = \Gamma(m)\,\Gamma(1-m),$$

poichè $\Gamma(1) = 1$. Quindi, per l'Art. 255, se m è minore dell'unità

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} m\pi}.$$

263. Si ponga nell'ultimo risultato $m = \frac{1}{2}$; allora

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi,$$

onde $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Daremo un'altra dimostrazione dell'ultimo risultato.

Sia $u = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$; allora è chiaro che u ancora

$$= \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy;$$

così $$u^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \times \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad \text{(Art. 66)}.$$

Questo doppio integrale si è mostrato nell'Art. 204 essere

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{4},$$

quindi $$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ora $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$; si ponga $x = y^2$,

così $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = 2u = \sqrt{\pi}.$$

264. Daremo ora un'espressione per $\Gamma(n)$ che somministrerà un'altra pruova del risultato nell'Art. 262. Conoscia-

mo che il limite di $\frac{x^h - 1}{h}$ quando h diminuisce indefinitamente è $\log x$; quindi

$$\left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1} = \text{limite di } \left(\frac{1 - x^h}{h}\right)^{n-1};$$

così possiamo scrivere

$$\left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1} = \left(\frac{1 - x^h}{h}\right)^{n-1} + y;$$

in cui y è una quantità che diminuisce senza limite al pari di h.

Si ponga $h = \frac{1}{r}$, allora, per l'Art. 258,

$$\Gamma(n) = r^{n-1} \int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{r}})^{n-1} dx + \int_0^1 y\, dx.$$

Nel primo integrale si ponga $x = z^r$; così

$$\Gamma(n) - \int_0^1 y\, dx = r^n \int_0^1 z^{r-1} (1 - z)^{n-1} dz.$$

Possiamo supporre r un intero; allora l'integrale a dritta, per l'Art. 33, è

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r}{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)} r^{n-1}.$$

Cresca r indefinitamente, allora y svanisce ed abbiamo

$$\Gamma(n) = \text{limite di } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r}{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)} r^{n-1}.$$

265. Dal risultato dell'articolo precedente abbiamo

$$\frac{\{\Gamma(n)\}^2}{\Gamma(n-m)\,\Gamma(n+m)} = \left\{1 - \frac{m^2}{n^2}\right\}\left\{1 - \frac{m^2}{(n+1)^2}\right\}\left\{1 - \frac{m^2}{(n+2)^2}\right\}\ldots$$

Un caso particolare di questo si ottiene supponendo $n = 1$; così

$$\frac{1}{\Gamma(1-m)\,\Gamma(1+m)} = \left(1 - \frac{m^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{3^2}\right)\ldots\ldots;$$

l'espressione a dritta si conosce che è eguale a $\frac{\operatorname{sen} m\pi}{m\pi}$; così

$$\Gamma(1-m)\,\Gamma(1+m)=\frac{m\pi}{\operatorname{sen} m\pi},$$

onde $$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} m\pi} \qquad \text{(Art. 259)}.$$

266. Stabiliremo ora l'equazione seguente, n essendo un intero,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}$$

Prima si supponga n *dispari*; nell'Art. 262 si ponga per m successivamente $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$ sino ad $\frac{n-1}{2n}$, e si moltiplichi; così

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\ldots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}}$$

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

(*Per la Trigonometria*).

In secondo luogo si supponga n *pari*; in questo caso si ponga per m successivamente $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ sino ad $\frac{n-2}{2n}$, e si formi il prodotto come sopra; indi si moltiplichi il primo membro per $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ed il secondo membro per l'equivalente $\sqrt{\pi}$; allora otteniamo lo stesso risultato come prima.

267. Una formola ancora più generale è

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\Gamma(nx)\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx},$$

che ora dimostreremo. Dinoti $\varphi(x)$

$$\frac{n^{nx}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nx)};$$

dobbiamo allora mostrare che $\varphi(x)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}$.

Abbiamo

$$\varphi(x+1)=\frac{n^{nx+n}\Gamma(x+1)\Gamma\left(x+1+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+1+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nx+n)}$$

$$=\frac{n^n x\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{(nx+n-1)(nx+n-2)\ldots\ldots nx}\varphi(x)$$

$$=\varphi(x).$$

Similmente $\varphi(x+2)=\varphi(x+1)=\varphi(x)$; e procedendo così abbiamo

$$\varphi(x)=\varphi(x+m),$$

in cui m può essere tanto grande quanto ci piace. Quindi $\varphi(x)$ è eguale al limite di $\varphi(\mu)$ quando μ è infinito; così $\varphi(x)$ *deve essere indipendente da* x, cioè, deve avere lo stesso valore qualunque sia x; quindi $\varphi(x)$ deve avere lo stesso valore che ha quando $x=\frac{1}{n}$; così il teorema discende dall'articolo precedente. Questo teorema è attribuito a Gauss; una dimostrazione più rigorosa è data negli *Exercices de Calcul Intégral* di Legendre, Vol. II. p. 23; si vegga anche il *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Vol. XVI. p. 212.

268. Molti integrali definiti si possono esprimere in termini della *funzione-Gamma;* daremo alcuni esempii.

L'integrale $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx$ diviene ponendo y per a^2x^2

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{2a\sqrt{y}},\text{ cioè, }\frac{1}{2a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\text{ o }\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Di più, in $\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx}{(x+a)^{l+m}}$ si ponga $\frac{x}{x+a} = \frac{y}{1+a}$; così otteniamo

$$\frac{1}{a^m(1+a)^l}\int_0^1 y^{l-1}(1-y)^{m-1}dy,\text{ cioè, } \frac{1}{a^m(1+a)^l}\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}.$$

Inoltre, in $\int_0^1 x^{l-1}(1-x^2)^{m-1}dx$ si ponga $x^2 = y$; così otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{l}{2}-1}(1-y)^{m-1}\,dy,\text{ cioè, } \frac{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)\Gamma(m)}{2\Gamma\left(\frac{l}{2}+m\right)}.$$

Così $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^p\theta\cos^q\theta\,d\theta = \int_0^1 x^p(1-x^2)^{\frac{q-1}{2}}dx$$

$$= \int_0^1 x^{p+1-1}(1-x^2)^{\frac{q+1}{2}-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}.$$

Di più, in $\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}dx}{\{ax+b(1-x)\}^{l+m}}$ si ponga $x = \frac{by}{a(1-y)+by}$;

così otteniamo

$$\frac{1}{a^lb^m}\int_0^1 y^{l-1}(1-y)^{m-1}dy,\text{ cioè, } \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{a^lb^m\,\Gamma(l+m)}.$$

269. In $\int_0^a x^{l-1}(a-x)^{m-1}dx$ si ponga $x = ay$; così otteniamo

$$a^{l+m-1}\int_0^1 y^{l-1}(1-y)^{m-1}\,dy,\text{ cioè, } a^{l+m-1}\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}.$$

270. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint \ldots x^{l-1}\,y^{m-1}\,z^{n-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili tutt'i valori *positivi* d'accordo con la condizione che $x+y+z+...$ non sia maggiore dell'unità.

Supporremo che vi siano tre variabili, e per conseguenza che l'integrale sia un integrale triplo; il metodo adottato si vedrà che è applicabile per un numero qualunque di variabili.

Dobbiamo prima integrare rispetto ad una delle variabili, supponiamo z; i limiti allora saranno 0 ed $1-x-y$; così tra questi limiti

$$\int z^{n-1}\,dz = \frac{(1-x-y)^n}{n} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}(1-x-y)^n.$$

In seguito s'integri rispetto ad una delle variabili rimanenti, supponiamo y; i limiti saranno 0 ed $1-x$; e tra questi limiti, per l'Art. 269,

$$\int y^{m-1}(1-x-y)^n\,dy = \frac{(1-x)^{m+n}\,\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}.$$

Finalmente s'integri rispetto ad x tra i limiti 0 ed 1; così tra questi limiti

$$\int x^{l-1}(1-x)^{m+n}\,dx = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(l+m+n+1)}.$$

Quindi il risultato finale è

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}\,\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(l+m+n+1)},$$

cioè,

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}.$$

271. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint \ldots \xi^{l-1}\,\eta^{m-1}\,\zeta^{n-1}\ldots d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili tutt'i valori positivi d'accordo con la condizione che

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^p+\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^q+\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^r+\ldots$$

non sia maggiore dell'unità.

Si ponga $x=\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^p$, $y=\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^q$, $z=\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^r$, ...

Allora l'integrale diviene

$$\frac{\alpha^l\beta^m\gamma^n\ldots}{pqr\ldots}\iiint\ldots x^{\frac{l}{p}-1}y^{\frac{m}{q}-1}z^{\frac{n}{r}-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

con la condizione che $x+y+z+\ldots$ non sia maggiore dell'unità. Il valore dell'integrale è, quindi, per l'articolo precedente

$$\frac{\alpha^l\beta^m\gamma^n\ldots}{pqr\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)\ldots\ldots}{\Gamma\left(\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}+\ldots+1\right)}.$$

272. Come un caso semplice dell'articolo precedente possiamo supporre $p, q, r\ldots$ essere ciascuno l'unità, ed $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ ciascuno eguale ad una costante h; così la condizione si è che $\xi+\eta+\zeta+\ldots$ non sia maggiore di h. Quindi il valore dell'integrale

$$\iiint\ldots\xi^{l-1}\eta^{m-1}\zeta^{n-1}\ldots d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots$$

è

$$h^{l+m+n+\ldots}\,\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(l+m+n+\ldots+1)},$$

che possiamo dinotare con

$$Nh^{l+m+n+\ldots}.$$

Similmente se l'integrale deve essere preso in modo che la somma delle variabili non ecceda $h+\Delta h$, otteniamo per risultato

$$N(h+\Delta h)^{l+m+n+\ldots}.$$

Quindi conchiudiamo che il valore dell'integrale esteso a tutti quei valori positivi delle variabili che danno la somma delle variabili compresa tra h ed $h+\Delta h$ è

$$N\{(h+\Delta h)^{l+m+n+\dots}-h^{l+m+n+\dots}\},$$

e quando Δh diminuisce indefinitamente, questo diviene

$$N(l+m+n+\dots)\, h^{l+m+n+\dots-1}\,\Delta h,$$

cioè,
$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\dots}{\Gamma(l+m+n+\dots)}\, h^{l+m+n+\dots-1}\,\Delta h.$$

273. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint\dots x^{l-1}\, y^{m-1}\, z^{n-1}\dots f(x+y+z+\dots)\, dx\, dy\, dz\dots$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili tutt'i valori *positivi* d'accordo con la condizione che $x+y+z+\dots$ non sia maggiore di c.

Supporremo per semplicità che vi siano tre variabili. Per l'articolo precedente se $f(x+y+z)$ si rimpiazzasse con l'unità quella parte dell'integrale che nasce dal supporre la somma delle variabili compresa tra h ed $h+\Delta h$ sarebbe ultimamente

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\, h^{l+m+n-1}\,\Delta h.$$

E se la somma delle variabili è compresa tra h ed $h+\Delta h$, il valore di $f(x+y+z)$ può differire solamente da $f(h)$ per una piccola quantità dello stesso ordine di Δh. Quindi, trascurando il quadrato di Δh, quella parte dell'integrale che nasce dal supporre la somma delle variabili compresa tra h ed $h+\Delta h$ è ultimamente

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\, f(h)\, h^{l+m+n-1}\,\Delta h.$$

Quindi l'intero integrale è

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\int_0^c f(h)\, h^{l+m+n-1}\, dh.$$

274. Similmente il valore di

$$\iiint \xi^{l-1}\eta^{m-1}\zeta^{n-1} f\left\{\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^q + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^r\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

per tutt'i valori positivi delle variabili, tali che

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^q + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^r$$

non sia maggiore di c, è

$$\frac{\alpha^l \beta^m \gamma^n}{pqr} \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}\right)} \int_0^c f(h)\, h^{\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}-1}\, dh.$$

Il risultato di questo articolo e del precedente si può estendere al caso di un numero qualunque di variabili.

275. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint \dots f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots\dots + a_n x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili *tutti* i valori d'accordo con la condizione che $x_1^2+x_2^2\dots+x_n^2$ non sia maggiore dell'unità.

Con la successiva applicazione di una trasformazione di integrale doppio data nell'Art. 242, l'integrale multiplo si può ridurre ad

$$\iiint \dots f(kx_1)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

in cui $k = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}$;

e queste trasformazioni non alterano la condizione che la somma dei quadrati delle variabili non sia maggiore dell'unità.

Dobbiamo allora trovare prima il valore dell'integrale multiplo $\iiint \ldots dx_2\, dx_3 \ldots dx_n$, le variabili essendo supposte avere tutt'i valori d'accordo con la condizione che $x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2$ non sia maggiore di $1-x_1^2$. Si supponga dapprima che le variabili debbano avere solamente valori *positivi;* allora otteniamo il valore dell'integrale supponendo nell'Art. 271, che ciascuna delle quantità $l, m, \ldots$ sia l'unità, che ciascuna delle quantità $p, q, \ldots$ sia eguale a 2, e che ciascuna delle quantità $\alpha, \beta, \ldots$ sia eguale a $\sqrt{(1-x_1^2)}$. Così il risultato è

$$\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1}}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}(1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ma se le variabili possono avere sì i valori negativi come i positivi, questo risultato deve essere moltiplicato per 2^{n-1}. Così otteniamo

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}(1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}.$$

Quindi, finalmente, poichè i limiti di x_1 saranno -1 ed 1, l'integrale multiplo è eguale a

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}\int_{-1}^{1} f(kx_1)\,(1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx_1.$$

Questo è d'accordo col risultato dato dal Professore Boole nel *Cambridge Mathematical Journal*, Vol. III. pag. 280, come si può trovare integrando per parti la sua equazione (15).

276. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint \ldots \frac{f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)}{\sqrt{(1-x_1^2-x_2^2\ldots-x_n^2)}}\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili *tutt'i*

valori d'accordo con la condizione che $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ non sia maggiore dell'unità.

Come nell'articolo precedente l'integrale si può trasformare in

$$\iiint \ldots \frac{f(kx_1)}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_n^2)}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

S'integri prima rispetto alle variabili $x_2, x_3, \ldots x_n$, i limiti essendo dati dalla condizione che $x_2^2 + x_3^2 \ldots + x_n^2$ non sia maggiore di $1 - x_1^2$. Ora se le variabili fossero ristrette ai valori positivi, l'integrale

$$\iiint \ldots \frac{dx_2 dx_3 \ldots dx_n}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_n^2)}}$$

per l'Art. 274 sarebbe eguale ad

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{1-x_1^2} (1 - x_1^2 - h)^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{n-1}{2}-1} dh,$$

cioè, ad

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - x_1^2)^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad \text{(Art. 269)},$$

cioè, ad

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (1 - x_1^2)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Ma se le variabili possono avere sì i valori negativi come i positivi, questo risultato deve essere moltiplicato per 2^{n-1}. Così otteniamo

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (1 - x_1^2)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Quindi finalmente, poichè i limiti di x_1 sono -1 ed 1, l'integrale multiplo è eguale a

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-1}^{1} f(kx_1)\,(1-x_1^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx_1.$$

277. Diversi metodi sono stati usati per esibire in termini semplici un valore approssimato di $\Gamma(n+1)$ quando n è molto grande: ne diamo uno di essi.

Il prodotto $e^{-x}x^n$ svanisce quando $x=0$ e quando $x=\infty$; e si può mostrare che esso ha solamente un valore massimo, cioè quando $x=n$. Possiamo per conseguenza supporre

$$e^{-x}x^n = e^{-n}n^n e^{-t^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

in cui t è una variabile che deve essere compresa tra i limiti $-\infty$ e $+\infty$.

Così $$\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = e^{-n}n^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt \ldots\ldots\ldots (2).$$

Si prendano i logaritmi dei due membri di (1); così

$$x - n\log x = n - n\log n + t^2 \ldots\ldots\ldots (3);$$

si ponga $x = n + u$; così

$$u - n\log(n+u) = t^2 - n\log n \ldots\ldots\ldots (4).$$

Ma pel Teorema di Taylor

$$\log(n+u) = \log n + \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2(n+\theta u)^2},$$

in cui θ è una frazione propria; così (4) diviene

$$\frac{nu^2}{2(n+\theta u)^2} = t^2;$$

onde $$\frac{\sqrt{(n)}\,u}{\sqrt{(2)}\,(n+\theta u)} = t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

quindi $$u = \frac{\sqrt{(2)}\, nt}{\sqrt{(n)} - \theta t \sqrt{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Ma da (3) $$\frac{dx}{dt} = \frac{2xt}{x-n} = 2t + \frac{2nt}{u}$$

$$= \sqrt{(2n)} + 2(1-\theta)\, t, \qquad \text{per } (6).$$

Quindi (2) diviene

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = e^{-n} n^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \{ \sqrt{(2n)} + 2(1-\theta)\, t \}\, dt;$$

ed $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{(\pi)}$; così

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = e^{-n} n^n \sqrt{(2n\pi)} \left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{(2n\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (1-\theta)\, t\, dt \right\} (7).$$

Ma poichè $1-\theta$ è positiva e minore dell'unità, il valore numerico di $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (1-\theta)\, t\, dt$ è minore di $\int_0^\infty e^{-t^2} t\, dt$, cioè, minore di $\frac{1}{2}$. Quindi conchiudiamo da (7) che quando n cresce indefinitamente, il rapporto di $\Gamma(n+1)$ ad $e^{-n} n^n \sqrt{(2n\pi)}$ si avvicina all'unità come suo limite.

Possiamo osservare che nell'equazione originale (1) abbiamo t^2 e non t; quindi il segno di t è in nostro potere, e noi lo scegliamo in modo che l'equazione (5) possa sussistere, supponendo $\sqrt{n}$ e $\sqrt{2}$ entrambi positivi.

(Si vegga il *Journal de Mathématiques* di Liouville, Vol. x. p. 464, e Vol. xvii. p. 448.)

Integrali definiti ottenuti differenziando o integrando rispetto a costanti.

278. Daremo ora alcuni esempii nei quali gl'integrali definiti si ottengono per mezzo della differenziazione rispetto ad una costante. (Si vegga Art. 213.)

Trovare il valore di $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2rx\,dx$. Si chiami u l'integrale definito; allora

$$\frac{du}{dr} = -2\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen} 2rx\,dx.$$

S'integri per parti il termine a dritta; così troviamo

$$\frac{du}{dr} = -\frac{2ru}{a^2};$$

onde
$$\frac{d\log u}{dr} = -\frac{2r}{a^2};$$

quindi
$$\log u = -\frac{r^2}{a^2} + \text{costante},$$

quindi
$$u = Ae^{-\frac{r^2}{a^2}},$$

in cui A è una quantità che è costante rispetto ad r, cioè, non contiene r. Per determinare A possiamo supporre $r=0$; così u diviene $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx$, cioè, $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$, (Art. 268). Quindi $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$, ed

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2rx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{r^2}{a^2}}.$$

279. Abbiamo stabilito nell'Art. 214, che quando uno dei limiti dell'integrazione è *infinito* il procedimento di differenziazione rispetto ad una costante *può* essere pericoloso; nel caso attuale però è facile di giustificarlo; dobbiamo mostrare che $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\rho\,dx$ svanisce quando ρ è ultimamente indefinitamente piccolo; è chiaro che questa quantità è numericamente minore di $\rho_1\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx$ in cui ρ_1 è il più grande valore di ρ, cioè, minore di $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\rho_1$; ma questo svanisce con ρ_1. Simili considerazioni si applicano ai casi seguenti.

280. Trovare il valore di $\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\operatorname{sen} rx\, dx}{x}$. Dinotandolo con u, allora

$$\frac{du}{dr} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos rx\, dx.$$

Ma $$\int e^{-kx} \cos rx\, dx = e^{-kx} \frac{r \operatorname{sen} rx - k \cos rx}{k^2 + r^2};$$

quindi $$\int_0^\infty e^{-kx} \cos rx\, dx = \frac{k}{k^2 + r^2};$$

così $$\frac{du}{dr} = \frac{k}{k^2 + r^2};$$

quindi $$u = \tan^{-1} \frac{r}{k}.$$

Non si richiede alcuna costante poichè u svanisce con r. Questo risultato vale per ogni valore positivo di k; se supponiamo che k diminuisca senza limite, otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} rx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

se r è positivo; se r è negativo il risultato sarà $-\frac{\pi}{2}$.

281. Trovare il valore di $\int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx$. Dinotandolo con u, allora

$$\frac{du}{da} = -2a \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2};$$

si ponga $x = \frac{a}{z}$, allora i limiti di z sono ∞ e 0; ed otteniamo

$$\frac{du}{da} = -2u;$$

onde
$$\frac{d \log u}{da} = -2;$$

quindi
$$\log u = -2a + \text{costante};$$

quindi
$$u = Ae^{-2a}.$$

Per determinare A possiamo supporre $a=0$; allora $u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; onde $A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; così

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

282. Possiamo applicare ancora il principio dell' *integrazione* rispetto ad una costante per determinare alcuni integrali definiti; il principio può essere stabilito così.

Sia
$$u = \int_a^b \varphi(x, c)\, dx,$$

allora
$$\int_\alpha^\beta u\, dc = \int_\alpha^\beta \int_a^b \varphi(x, c)\, dc\, dx$$
$$= \int_a^b \int_\alpha^\beta \varphi(x, c)\, dx\, dc;$$

poichè quando i limiti sono costanti, l'ordine dell' integrazione è indifferente (Art. 62). Daremo ora alcuni esempii di questo metodo.

283. Sappiamo che $\int_0^\infty e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k}$.

S'integrino i due lati rispetto a k tra i limiti a e b; così

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \log \frac{b}{a}.$$

Si noti che $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\, dx}{x}$ ed $\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\, dx}{x}$ sono tutti e due infiniti; poichè $\int_0^c \frac{e^{-ax}\, dx}{x}$ è maggiore di $e^{-ca}\int_0^c \frac{dx}{x}$, ed $\int_0^c \frac{dx}{x}$

è infinito. Ma ciò può stare con l'asserzione che $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{x}dx$ è finito, e senza trovare il valore di questo integrale è facile mostrare che esso deve essere finito. Infatti esso è eguale alla somma di $\int_0^c \frac{\varphi(x)\,dx}{x}$ ed $\int_c^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{x}$ in cui $\varphi(x)=e^{-ax}-e^{-bx}$; il secondo di questi integrali è finito, poichè esso è minore di $\frac{1}{c}\int_c^\infty \varphi(x)\,dx$, cioè, minore di $\frac{1}{c}\left(\frac{e^{-ac}}{a}-\frac{e^{-bc}}{b}\right)$. Dobbiamo quindi esaminare solamente $\int_0^c \frac{\varphi(x)}{x}dx$.

Ora pel Teorema di Maclaurin

$$\varphi(x)=(b-a)x+\frac{x^2}{2}\varphi''(x\theta),$$

in cui θ è una frazione; così $\frac{\varphi(x)}{x}$ è minore di $b-a+\frac{Ax}{2}$, in cui A è il più gran valore che può prendere $\varphi''(x)$ per i valori di x minori di c. Quindi

$$\int_0^c \frac{\varphi(x)}{x}dx \text{ è minore di } (b-a)c+\frac{Ac^2}{4},$$

ed è per conseguenza finito.

284. Sappiamo che

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos rx\,dx=\frac{k}{k^2+r^2}.$$

S'integrino i due lati rispetto a k tra i limiti a e b; così

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos rx\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}.$$

285. Si dinoti $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} rx}{x}dx$ con A, ed $\int_0^\infty \frac{\cos rx}{1+x^2}dx$ con B; determineremo ora i valori di A e B; il primo è stato già determinato con un altro metodo nell'Art. 280.

Nell' integrale A si ponga y per rx; così

$$A = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y \, dy}{y};$$

ciò mostra che A è indipendente da r.

Abbiamo $$\frac{dB}{dr} = -\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx \, dx}{1+x^2},$$

ed $$\int_0^r B dr = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} rx \, dx}{x(1+x^2)};$$

così $$\int_0^r B dr - \frac{dB}{dr} = \int_0^\infty \frac{1+x^2}{x} \frac{\operatorname{sen} rx}{1+x^2} dx = A;$$

quindi $$\int_0^r B dr - \frac{dB}{dr} - A = 0 \dots\dots\dots\dots (1).$$

Si moltiplichi per e^{-r} e s'integri; otteniamo poichè A è costante rispetto ad r

$$e^{-r}\left\{\int_0^r B dr + B - A\right\} = \text{costante}.$$

Ora qualunque sia il valore di r, è chiaro che gl'integrali rappresentati da A, B, ed $\int_0^r B dr$ sono *finiti*; quindi la costante nell'ultima equazione deve essere zero, poichè il primo membro svanisce quando r è infinito.

Così $$\int_0^r B dr + B - A = 0 \, , \dots\dots\dots\dots (2).$$

Da (1) e (2) $$\frac{dB}{dr} = -B;$$

quindi $$B = Ce^{-r},$$

in cui C è una costante. E da (2)

$$A = Ce^{-r} - C(e^{-r} - 1) = C;$$

quindi $$B = Ae^{-r} \dots\dots\dots\dots (3).$$

Ora quando r diminuisce indefinitamente, B diviene $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, cioè, $\frac{\pi}{2}$; quindi da (3)

$$A=\frac{\pi}{2} \text{ e } B=\frac{\pi}{2}e^{-r}.$$

Abbiamo supposto r positivo; è chiaro che se r è negativo, B ha lo stesso valore come se r fosse positivo, ed A ha il segno mutato; cioè, se r è negativo $B=\frac{\pi}{2}e^{r}$ ed $A=-\frac{\pi}{2}$. (*Transactions of the Royal Irish Academy*, Vol. XIX. p. 227.)

Da $\int_0^\infty \frac{\cos rx\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-r}$, otteniamo con la differenziazione rispetto ad r,

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-r}.$$

E dallo stesso integrale integrando rispetto ad r tra i limiti 0 e c, abbiamo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} cx\,dx}{x(1+x^2)}=\frac{\pi}{2}(1-e^{-c}).$$

286. L'articolo precedente contiene una rigorosa investigazione dei valori degl'integrali A e B; un altro metodo è stato dato alle volte per trovare il valore di B che è più semplice ma molto meno soddisfacente. Non di meno daremo ora questo metodo, poichè ci condurrà a notare un punto importante.

Sia $$B=\int_0^\infty \frac{\cos rx}{1+x^2}dx,$$

allora $$\frac{dB}{dr}=-\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}dx,$$

e
$$\frac{d^2B}{dr^2} = -\int_0^\infty \frac{x^2 \cos rx}{1+x^2}\,dx$$
$$= -\int_0^\infty \cos rx\,dx + \int_0^\infty \frac{\cos rx}{1+x^2}\,dx$$
$$= -\int_0^\infty \cos rx\,dx + B.$$

Ora per ragioni che fra poco esamineremo, *supponiamo* che $\int_0^\infty \cos rx\,dx = 0$; così
$$\frac{d^2B}{dr^2} = B,$$
e dobbiamo trovare B da questa equazione. Si moltiplichino i due lati per $2\frac{dB}{dr}$ e s'integri rispetto ad r; così
$$\left(\frac{dB}{dr}\right)^2 = h + B^2;$$
in cui h è una costante, cioè, h è indipendente da r. Così
$$\frac{dB}{dr} = \sqrt{(h + B^2)},$$
onde
$$\frac{dr}{dB} = \frac{1}{\sqrt{(h+B^2)}};$$
integrando abbiamo
$$r + k = \int \frac{dB}{\sqrt{(h+B^2)}} = \log\{B + \sqrt{(h+B^2)}\},$$
in cui k è un'altra costante.

Così
$$e^{r+k} = B + \sqrt{(h+B^2)},$$

Trasponendo, elevando a quadrato, e riducendo otteniamo finalmente
$$B = C_1 e^r + C_2 e^{-r},$$

in cui C_1 e C_2 sono costanti. Dobbiamo ora determinare i valori di queste costanti. Poichè B non può crescere indefinitamente con r dobbiamo avere $C_1 = 0$; ed allora poichè $B = \frac{\pi}{2}$ quando $r = 0$ abbiamo $C_2 = \frac{\pi}{2}$. Così

$$B = \frac{\pi}{2} e^{-r}.$$

Procediamo ora a considerare la supposizione fatta nel metodo precedente.

Poichè $\int e^{-ax} \operatorname{sen} rx \, dx = - e^{-ax} \frac{a \operatorname{sen} rx + r \cos rx}{a^2 + r^2}$,

ed $\int e^{-ax} \cos rx \, dx = e^{-ax} \frac{r \operatorname{sen} rx - a \cos rx}{a^2 + r^2}$

abbiamo $\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} rx \, dx = \frac{r}{a^2 + r^2}$,

ed $\int_0^\infty e^{-ax} \cos rx \, dx = \frac{a}{a^2 + r^2}$,

se a è una quantità positiva.

Se fosse concesso di supporre $a = 0$ otterremmo

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} rx \, dx = \frac{1}{r}, \text{ ed } \int_0^\infty \cos rx \, dx = 0.$$

Poichè $\int \operatorname{sen} rx \, dx = -\frac{\cos rx}{r}$, ed $\int \cos rx \, dx = \frac{\operatorname{sen} rx}{r}$ siamo così condotti apparentemente alla conclusione che *il seno ed il coseno di un angolo infinito sono entrambi zero.* La stessa conclusione sembra essere suggerita in altri casi, sicchè si è stabilito, che « i simboli indeterminati $\operatorname{sen} \infty$ e $\cos \infty$ si trovano in innumerevoli casi rappresentare entrambi 0, il valore medio sì di $\operatorname{sen} x$ che di $\cos x$. »

Su questo punto però vi è diversità di opinione tra i matematici, e la discussione su di ciò sarebbe inadatta in un'opera elementare; lo studente può consultare in appresso tre

memorie nell'ottavo volume dello *Cambridge Philosophical Transactions*, numerate XV, XIX, e XXXII.

Integrali definiti ottenuti con lo sviluppo.

287. Se sviluppiamo $\log\{1 - ae^{x\sqrt{(-1)}}\}$ e $\log\{1 - ae^{-x\sqrt{(-1)}}\}$ ed aggiungiamo, si ottiene
$\log(1 - 2a\cos x + a^2)$

$$= -2\left(a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \ldots\ldots\right),$$

la serie essendo convergente se a è minore dell'unità. S'integrino i due lati rispetto ad x tra i limiti 0 e π; così

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = 0, \; a \text{ essendo minore di } 1.$$

Se a è maggiore di 1, poichè

$$\log(1 - 2a\cos x + a^2) = \log a^2 + \log\left(1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\right),$$

abbiamo

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = \pi\log a^2 = 2\pi\log a.$$

Se $a = 1$ si può mostrare per l'Art. 51 che l'integrale definito è zero.

Possiamo porre il risultato nella forma seguente;

$$\int_0^\pi \log(a^2 - 2ac\cos x + c^2)\,dx = \pi\log k^2,$$

in cui k^2 è la più grande delle due quantità a^2 e c^2, ed è eguale a ciascuna di esse se sono eguali.

Differenziando questo risultato rispetto ad a giungiamo al risultato che costituisce l'ultimo esempio dell'Art. 50.

288. Con l'integrazione per parti abbiamo

$$\int \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx$$
$$= x\log(1-2a\cos x+a^2) - 2a\int \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1-2a\cos x+a^2}.$$

Quindi, se a è minore di 1,

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{2a}\log(1+a)^2, \text{ cioè, } \frac{\pi}{a}\log(1+a);$$

se a è maggiore di 1, il risultato è

$$\frac{\pi}{a}\log(1+a) - \frac{\pi}{a}\log a, \text{ cioè, } \frac{\pi}{a}\log\left(1+\frac{1}{a}\right).$$

289. In simil modo abbiamo, se r è un intero,

$$\int_0^\pi \cos rx \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx = -\frac{\pi}{r}a^r, \text{ o } -\frac{\pi}{r}a^{-r},$$

secondo che a è minore o maggiore dell'unità.

290. S'integri per parti l'integrale nell'articolo precedente; così troviamo

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} rx\, dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{2}a^{r-1} \text{ o } \frac{\pi}{2}a^{-(r+1)},$$

secondo che a è minore o maggiore dell'unità.

291. Similmente dal noto sviluppo

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$$
$$= 1 + 2a\cos x + 2a^2\cos 2x + 2a^3\cos 3x + \ldots\ldots$$

in cui a è minore di 1, possiamo dedurre alcuni integrali definiti; così se r è un intero

$$\int_0^\pi \frac{\cos rx\, dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi a^r}{1-a^2},$$

infatti ogni termine che dobbiamo integrare svanisce con i limiti assegnati, eccetto $2a^r\int_0^\pi \cos^2 rx\,dx$.

292. Trovare il valore di $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\frac{dx}{1-2a\cos cx+a^2}$.

Il termine $\frac{1}{1-2a\cos cx+a^2}$ si può sviluppare come nell'Art. 291; allora ogni termine si può integrare con l'Art. 286, e sommare i risultati. Così otterremo

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-a^2}\,\frac{1+ae^{-c}}{1-ae^{-c}}.$$

293. Similmente,

$$\int_0^\infty \log(1-2a\cos cx+a^2)\,\frac{dx}{1+x^2}=\pi\log(1-ae^{-c}).$$

294. Si conosce ancora dalla Trigonometria che

$$\frac{\operatorname{sen} cx}{1-2a\cos cx+a^2}=\operatorname{sen} cx+a\operatorname{sen} 2cx+a^2\operatorname{sen} 3cx+\ldots,$$

a essendo minore di 1. Quindi per l'Art. 286, otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} cx\,dx}{(1+x^2)(1-2a\cos cx+a^2)}=\frac{\pi}{2(e^c-a)}.$$

Questo segue ancora dall' Art. 293, differenziando rispetto a c.

295. Trovare $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx$.

Sviluppando $(1-x)^{-1}$, troviamo per l'integrale una serie di cui il tipo è

$$\int_0^1 x^n \log x\,dx.$$

Con l'integrazione per parti questo si vede essere eguale a $-\frac{1}{(1+n)^2}$. Quindi il risultato è

$$-\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\right\},$$

cioè, per una formola conosciuta, $-\frac{\pi^2}{6}$.

296. Trovare $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{1+(\cos x)^2}$.

Si sviluppi il fattore $\{1+(\cos x)^2\}^{-1}$, e troviamo per l'integrale una serie di cui il tipo è

$$(-1)^n \int_0^\pi x \operatorname{sen} x (\cos x)^{2n} \, dx.$$

Con l'integrazione per parti questo si può mostrare essere eguale a $\frac{(-1)^n \pi}{2n+1}$.

Quindi il risultato è

$$\pi\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\right\},$$

cioè, per una formola conosciuta, $\frac{\pi^2}{4}$.

297. Dinoti v $e^{x\sqrt{(-1)}}$, cioè, $\cos x+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen} x$; allora se f dinota una funzione qualunque, abbiamo pel Teorema di Taylor,

$$f(a+v)+f(a+v^{-1})$$
$$=2\left\{f(a)+f'(a)\cos x+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}\cos 2x+\dots\dots\right\}.$$

Ed

$$\frac{1-c^2}{1-2c\cos x+c^2}=1+2c\cos x+2c^2\cos 2x+2c^3\cos 3x+\dots$$

Quindi

$$\int_0^\pi \frac{f(a+v)+f(a+v^{-1})}{1-2c\cos x+c^2}\,dx = \frac{2\pi}{1-c^2}\left\{f(a)+cf'(a)+\frac{c^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots\right\}$$

$$= \frac{2\pi}{1-c^2} f(a+c).$$

Bisogna rammentarsi che in questo risultato c deve essere minore dell'unità, e le funzioni $f(a+v)$ ed $f(a+v^{-1})$ debbono essere tali che per i loro sviluppi regga il Teorema di Taylor.

In modo simile si può mostrare che

$$\int_0^\pi \frac{f(a+v)-f(a+v^{-1})}{1-2c\cos x+c^2}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi\sqrt{(-1)}}{c}\{f(a+c)-f(a)\},$$

ed
$$\int_0^\pi \frac{1-c\cos x}{1-2c\cos x+c^2}\{f(a+v)+f(a+v^{-1})\}\,dx$$

$$= \pi\{f(a+c)+f(a)\}.$$

Sostituzione di valori immaginarii per le costanti.

298. Alle volte si deducono degl'integrali definiti da integrali conosciuti sostituendo valori immaginarii per alcune delle costanti che si trovano in essi. Questo procedimento non si può considerare dimostrativo, ma servirà almeno a suggerire le forme le quali possono essere esaminate, e forse verificate con altri metodi (si vegga *Differential and Integral Calculus*, di De Morgan, p. 630). Daremo alcuni esempii di ciò.

Abbiamo
$$\int_0^\infty e^{-px}x^{n-1}\,dx = p^{-n}\,\Gamma(n).$$

Per p si ponga $a+b\sqrt{(-1)}$, e supponiamo $r=\sqrt{(a^2+b^2)}$ e $\tan\theta=\frac{b}{a}$, sicchè $p=r\{\cos\theta+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}\theta\}$; così

$$\int_0^\infty e^{-\{a+b\sqrt{(-1)}\}x}x^{n-1}\,dx = r^{-n}\{\cos n\theta-\sqrt{(-1)}\operatorname{sen} n\theta\}\,\Gamma(n).$$

Così separando le parti reali e le immaginarie abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n-1} \cos bx\, dx = \frac{\Gamma(n) \cos\left(n \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n-1} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\Gamma(n) \operatorname{sen}\left(n \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Per i modi di verificazione si vegga De Morgan, p. 630.

299. Nella formola

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

si muti a in $\frac{1+\sqrt{(-1)}}{\sqrt{2}}\, c$; così

$$\int_0^\infty e^{-c^2x^2\sqrt{(-1)}}\, dx = \frac{1-\sqrt{(-1)}}{2c} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}};$$

onde

$$\int_0^\infty \left\{ \cos c^2x^2 - \sqrt{(-1)} \operatorname{sen} c^2x^2 \right\} dx = \frac{1-\sqrt{(-1)}}{2c} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}};$$

quindi
$$\int_0^\infty \cos c^2x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{2}},$$

ed
$$\int_0^\infty \operatorname{sen} c^2x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{2}},$$

Se scriviamo y per c^2x^2, questi divengono

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y\, dy}{\sqrt{y}} = \int_0^\infty \frac{\cos y\, dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

300. Nell' integrale $\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)k}\,dx$, si supponga $y=x\sqrt{k}$; così l'integrale diviene $\frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^\infty e^{-\left(y^2+\frac{k^2a^2}{y^2}\right)}\,dy$, che è conosciuto per l'Art. 281. Così

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)k}\,dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2ak}.$$

Ora si ponga $\cos\theta+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,\theta$ per k; così il secondo membro diviene

$$\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a\{\cos\theta+\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,\theta\}},$$

cioè,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\cos\left(2a\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\theta}{2}\right)-\sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\left(2a\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\theta}{2}\right)\right\}e^{-2a\cos\theta}.$$

Così $\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\cos\theta}\cos\left\{\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{sen}\,\theta\right\}dx$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a\cos\theta}\cos\left(2a\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\theta}{2}\right).$$

ed $\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\cos\theta}\,\mathrm{sen}\left\{\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{sen}\,\theta\right\}dx$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a\cos\theta}\,\mathrm{sen}\left(2a\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\theta}{2}\right).$$

ESEMPII.

1. Valutare $\int_0^\infty \frac{(x^2+a^2)\,dx}{x^4+b^2x^2+b^4}$. *Risultato.* $\frac{(a^2+b^2)\pi}{2b^3\sqrt{3}}$.

2. Valutare $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(a\tan x)\,dx$. *Risultato.* $\frac{\pi}{2}e^{-a}$.

3. Valutare $\int_0^1 x^{2n-1} e^{x^n} dx$. *Risultato.* $\frac{1}{n}$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{ab^3} + \frac{1}{a^3 b}\right)$,

5. Dimostrare $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\tan \varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} + \log\{\sqrt{(2)} - 1\}\right]$.

6. Dimostrare $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\cot \varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} + \log\{\sqrt{(2)} + 1\}\right]$.

7. Trovare il valore limite di $xe^{-x^2}\int_0^x e^{x^2} dx$ quando $x=\infty$.

Risultato. $\frac{1}{2}$.

8. Mostrare che $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \log \frac{b}{a}$.

9. Se $F\left(x, \frac{1}{x}\right)$ è una funzione simmetrica di x ed $\frac{1}{x}$, allora

$$\int_0^\infty \frac{dx}{xF\left(x, \frac{1}{x}\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{xF\left(x, \frac{1}{x}\right)}.$$

10. Se $F(x)$ è un polinomio algebrico di grado inferiore ad n

$$\int_b^a \frac{F(x)\,dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{\underline{|n-1}} \frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}\left\{F(c) \log \frac{a-c}{b-c}\right\}.$$

11. Dimostrare che $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 2\pi$.

12. Dimostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(1-c)}\, d\theta}{1 - c\cos^n \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{(2n)}}$ quando c è indefinitamente prossimo all'unità, n essendo una quantità positiva.

13. Valutare $\int_0^\pi (a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta)\log(a\cos^2\theta + b\,\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta$.

Risultato. $2b\left\{\log a - 2 + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}}\cos^{-1}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right\}$,

supponendo a maggiore di b.

14. Mostrare che

$$\int_0^\infty \log\frac{1+2n\cos ax+n^2}{1+2n\cos bx+n^2}\cdot\frac{dx}{x} = \log(1+n)\log\frac{b^2}{a^2},$$

o $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\frac{b^2}{a^2}$, secondo che n è minore o maggiore dell'unità.

15. Trovare il valore di

$$\int_0^\infty \left\{e^{-ax-\alpha x\sqrt{(-1)}} - e^{-bx-\beta x\sqrt{(-1)}}\right\}\frac{dx}{x},$$

in cui a e b sono positivi, ma α e β positivi o negativi; e mostrare che esso è interamente reale quando $\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}$.

16. Dimostrare che $\int_0^1 \cot^{-1}(1-x+x^2)\,dx = \frac{\pi}{2} - \log 2$.

17. Dimostrare che $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\log\left(x+\frac{1}{x}\right) = \pi\log 2$.

18. Dal valore di $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx$ dedurre quello di

$$\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^2 dx.$$

Risultato. I due integrali sono eguali.

19. Dimostrare che $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)^2 dx = \log\frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}$.

20. Mostrare che $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cdot\log x}{(1+x)^2}\,dx = \pi$.

21. Mostrare che $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx = (b-a)\sqrt{\pi}$.

(*Solutions of Senate-House Problems*, per O' Brien ed Ellis, p. 44.)

22. Mostrare che $\int_0^\infty \log\frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$.

23. Dimostrare che $\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\log x}\cdot\frac{dx}{x} = \log\frac{m}{n}$, e riconciliare con questa equazione il risultato della trasformazione dell' $\int_0^1 \frac{x^{r-1}\,dx}{\log x}$ ponendo $x^r = y$.

24. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$.

25. Mostrare che $\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx}{(b+cx)^{l+m}} = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}\,\frac{1}{b^m(b+c)^l}$.

26. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2l-1}\theta\,\operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,d\theta}{(a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}^2\theta)^{l+m}} = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{2\Gamma(l+m)}\,\frac{1}{a^l b^m}$.

27. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^n\theta\,d\theta}{a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}n\pi}\,\frac{1}{a^{\frac{1-n}{2}}\,b^{\frac{1+n}{2}}}$,

n essendo minore dell' unità.

28. Mostrare che $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^{n-1}\theta\,d\theta}{(\alpha+\beta\cos\theta)^n} = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(n)}\,\frac{2^{n-1}}{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{n}{2}}}$.

29. Mostrare che $\int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n\operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}}$.

30. Mostrare che $\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+cx)(1-x)^n} = \frac{\pi}{(1+c)^n \operatorname{sen} n\pi}$.

31. Mostrare che $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen}^2 cx}{x}\,dx = 0,\ \pm\frac{\pi}{4},\ \text{o}\ \pm\frac{\pi}{8}$, a seconda dei valori di a e c.

32. Descrivere il luogo dell'equazione

$$y = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta x}{\theta}\,d\theta.$$

33. Descrivere il luogo dell'equazione

$$\frac{y}{b} = \int_0^\pi \log\{1 - 2e^{-u}\cos\theta + e^{-2u}\}\,d\theta,$$

in cui $u = \operatorname{sen}\frac{x}{a}$.

34. Descrivere il luogo dell'equazione

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(x^2 + 2x\operatorname{sen}\theta + 1)}},$$

in cui il segno della radice quadrata è sempre preso in modo da rendere positiva la quantità nel denominatore.

35. Mostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

36. Paragonare i risultati ottenuti da

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \operatorname{sen} ax\, e^{-xy}\,dx\,dy,$$

eseguendo le integrazioni in ordine diverso.

37. Trovare il valore di $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}}dx$, e quindi mostrare che

$$\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}}dx = \frac{5a\sqrt{\pi}}{4e^2} = 5\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}}dx.$$

38. Mostrare che

$$\iint \frac{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

l'integrale essendo esteso su tutt'i valori positivi di x ed y che rendono x^2+y^2 non maggiore dell'unità,

39. Mostrare che

$$\iiint\ldots \frac{dx\,dy\,dz\ldots}{\sqrt{(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{2^n\,\Gamma\left\{\frac{n+1}{2}\right\}},$$

il numero delle variabili essendo n, e l'integrazione estendendosi su tutt'i valori positivi che rendono

$$x^2+y^2+z^2+\ldots\ldots$$

non maggiore dell'unità.

40. Se $\quad A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots = F(x)$,

ed $\quad a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots = f(x)$,

dimostrare che $A_0a_0+A_1a_1x^2+A_2a_2x^4+\ldots\ldots$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{F(u)+F(v)\}\{f(u)+f(v)\}\,d\theta - A_0a_0,$$

in cui $\quad u = xe^{\theta\sqrt{(-1)}}$ e $v = xe^{-\theta\sqrt{(-1)}}$.

41. Se la somma della serie $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots$ si può esprimere in forma finita, allora la somma della serie $a_0^2+a_1^2x^2+a_2^2x^4+\ldots\ldots$ si può esprimere con un integrale definito. Dimostrare ciò, e quindi mostrare che la somma dei quadrati dei coefficienti dei ter-

mini dello sviluppo di $(1+x)^n$ quando n è un numero intero positivo si può esprimere con

$$\frac{2^{2n+2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \cos^2 n\theta \, d\theta - 1.$$

42. Dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\cos cx \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{e^c}{1+0^{-c}} + \frac{e^{-c}}{1+0^c}\right\}.$$

43. Mostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\operatorname{sen} 2x) \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \cos x \, dx.$$

(*Journal de Mathématiques* di Liouville, Vol. XVIII. pag. 168.)

44. Mostrare che $\quad 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \ldots\ldots$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen} y) \, dy.$$

45. Dimostrare che

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n} dx \int_0^\infty y^{n-m-1} e^{-y^n} dy = \frac{\pi}{n^2 \operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}}$$

(Si vegga l'Art. 66; e si passi dalla variabile y ad u essendo $y = ux$.)

46. Mostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2\cos 2\theta + \frac{a^2}{2x^2}\operatorname{sen} 2\theta\right)} \frac{\cos}{\operatorname{sen}}\left\{x^2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{a^2}{2x^2}\cos 2\theta\right\} dx$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}} e^{-a} \frac{\cos}{\operatorname{sen}} (\theta + a);$$

θ essendo compreso tra i limiti $\pm\frac{\pi}{4}$.

CAPITOLO XIII.

SVILUPPO DELLE FUNZIONI IN SERIE TRIGONOMETRICHE.

301. Il soggetto al quale c'introduciamo è una delle più importanti applicazioni del Calcolo Integrale, e benchè in un'opera elementare come questa, non si possa dare di essa che un abbozzo imperfetto, pure a motivo della novità dei metodi, e dell'importanza dei risultati, anche un tale abbozzo può essere utile allo studente. Per più estesa informazione possiamo indicare il *Differential and Integral Calculus* del Professore de Morgan. Il soggetto si trova anche considerato spesso negli scritti di Poisson, per esempio, nel suo *Traité de Mécanique*, Vol. I. pp. 643–653; nel suo *Traité de la Chaleur*; ed in diverse Memorie nel *Journal de l'École Polytechnique*. Lo studente può anche consultare una Memoria del Professore Stokes, nell'8° Vol. delle *Cambridge Philosophical Transactions*, una Memoria del Sig. W. Hamilton, nel 19° Vol. delle *Transactions of the Royal Irish Academy*, ed una Memoria del Professore Boole, nel 21° Vol. delle stesse *Transactions*.

302. Si vogliano trovare i valori delle m costanti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$, in modo che l'espressione

$$A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen} 2x + A_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots\ldots + A_m \operatorname{sen} mx.$$

coincida in valore con una funzione assegnata di x quando x ha i valori $0, 2\theta, 3\theta, \ldots m\theta$, in cui $\theta = \frac{\pi}{m+1}$.

Dinoti $f(x)$ la funzione assegnata di x, allora abbiamo

per ipotesi le seguenti m equazioni dalle quali si debbono determinare le costanti,

$$f(\theta) = A_1 \operatorname{sen} \theta \ + A_2 \operatorname{sen} 2\theta + A_3 \operatorname{sen} 3\theta + \ldots\ldots + A_m \operatorname{sen} m\theta,$$
$$f(2\theta) = A_1 \operatorname{sen} 2\theta + A_2 \operatorname{sen} 4\theta + A_3 \operatorname{sen} 6\theta + \ldots\ldots + A_m \operatorname{sen} 2m\theta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(m\theta) = A_1 \operatorname{sen} m\theta + A_2 \operatorname{sen} 2m\theta + A_3 \operatorname{sen} 3m\theta + \ldots\ldots + A_m \operatorname{sen} mm\theta.$$

Si moltiplichi la prima di queste equazioni per $\operatorname{sen} r\theta$, la seconda per $\operatorname{sen} 2r\theta, \ldots,$ l'ultima per $\operatorname{sen} mr\theta$; indi si addizionino i risultati. Il coefficiente di A_s nel secondo membro sarà allora

$$\operatorname{sen} r\theta \operatorname{sen} s\theta + \operatorname{sen} 2r\theta \operatorname{sen} 2s\theta + \ldots\ldots + \operatorname{sen} mr\theta \operatorname{sen} ms\theta;$$

mostreremo ora che questo coefficiente è zero se s è diverso da r, ed eguale ad $\frac{1}{2}(m+1)$ quando s è eguale ad r.

Supponiamo prima s diverso da r. Ora due volte il suddetto coefficiente è eguale alla serie

$$\cos (r-s)\theta + \cos 2(r-s)\theta + \ldots\ldots + \cos m(r-s)\theta,$$

diminuita della serie

$$\cos (r+s)\theta + \cos 2(r+s)\theta + \ldots\ldots + \cos m(r+s)\theta.$$

La somma della prima serie si sa per la Trigonometria essere eguale a

$$\frac{\operatorname{sen}(2m+1)\frac{(r-s)\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{(r-s)\theta}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{(r-s)\theta}{2}},$$

cioè, a $$\frac{\operatorname{sen}\left\{(r-s)\pi - \frac{(r-s)\theta}{2}\right\} - \operatorname{sen}\frac{(r-s)\theta}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{(r-s)\theta}{2}}.$$

Questa espressione svanisce quando $r-s$ è un numero dispari, ed è eguale a -1 quando $r-s$ è un numero pari.

La somma della seconda serie si può dedurre da quella della prima cambiando il segno di s; quindi questa somma

svanisce quando $r+s$ è un numero dispari, ed è eguale a -1 quando $r+s$ è un numero pari.

Così quando s è diverso da r, il coefficiente di A_s è zero.

Quando s è eguale ad r, il coefficiente diventa

$$\operatorname{sen}^2 r\theta + \operatorname{sen}^2 2r\theta + \ldots\ldots + \operatorname{sen}^2 mr\theta,$$

cioè, $$\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\{\cos 2r\theta + \cos 4r\theta + \ldots\ldots + \cos 2mr\theta\}.$$

E col metodo già adoperato si vedrà che la somma della serie de' coseni è -1; così il coefficiente di A_r è $\frac{1}{2}(m+1)$. Quindi otteniamo

$$A_r = \frac{2}{m+1}\{\operatorname{sen} r\theta f(\theta) + \operatorname{sen} 2r\theta f(2\theta) + \ldots\ldots + \operatorname{sen} mr\theta f(m\theta)\},$$

e così dando ad r successivamente i diversi valori interi da 1 ad m, le costanti sono determinate.

Ora supponiamo che m cresca indefinitamente, allora abbiamo ultimamente

$$A_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} rv f(v)\, dv.$$

E siccome $f(x)$ coincide ora in valore con l'espressione

$$A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots\ldots$$

per un numero infinito di valori equidistanti di x tra 0 e π, possiamo scrivere il risultato nel seguente modo

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\Sigma_1^\infty \operatorname{sen} nx \int_0^\pi \operatorname{sen} nv f(v)\, dv,$$

in cui il simbolo Σ_1^∞ indica una sommazione da ottenersi dando ad n ogni valore intero positivo.

303. Il teorema e la dimostrazione dell'articolo precedente si debbono a Lagrange; abbiamo dato questa dimostrazione

in parte pel suo interesse istorico, ed in parte perchè fornisce una veduta instruttiva del soggetto. Non ci fermeremo però ad esaminare da vicino la dimostrazione, ma procediamo immediatamente al modo d'investigazione adottato da Poisson.

304. Il seguente sviluppo si può ottenere con gli ordinarii metodi Trigonometrici,

$$\frac{1-h^2}{1-2h\cos\frac{\pi(v-x)}{l}+h^2}=1+2h\cos\frac{\pi(v-x)}{l}$$
$$+2h^2\cos\frac{2\pi(v-x)}{l}+2h^3\cos\frac{3\pi(v-x)}{l}+\ldots,$$

h essendo minore dell'unità, sicchè la serie è convergente.

Si moltiplichino i due membri per $\varphi(v)$, e s'integrino rispetto a v tra i limiti $-l$ ed l; inoltre si faccia avvicinare h all'unità come suo limite. Nel secondo membro le diverse potenze di h diventano ultimamente l'unità. Il numeratore della frazione nel primo membro svanirà ultimamente, e così l'integrale svanirebbe *se il denominatore della frazione non fosse mai zero*. Ma *se x giace tra $-l$ ed l*, il termine $\cos\frac{\pi(v-x)}{l}$ diverrà eguale all'unità durante l'integrazione, e così il denominatore della frazione sarà $(1-h)^2$, e tenderà verso zero quando h si avvicina all'unità. Così l'integrale non svanirà necessariamente; procediamo a determinarne il valore. Sia $v-x=z$ ed $h=1-g$, così

$$\int\frac{(1-h^2)\,\varphi(v)\,dv}{1-2h\cos\frac{\pi(v-x)}{l}+h^2}=\int\frac{g\,(1+h)\,\varphi(x+z)\,dz}{g^2+4h\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi z}{2l}}.$$

Ora la sola parte dell'integrale che ha un valore sensibile, è quella che nasce da valori molto piccoli positivi o negativi di z; così possiamo porre

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{2l}=\frac{\pi z}{2l},$$

e

$$\varphi(x+z)=\varphi(x);$$

e l'integrale diviene

$$g(1+h)\,\varphi(x)\int\frac{dz}{g^2+\frac{h\pi^2z^2}{l^2}}=2g\,\varphi(x)\int\frac{dz}{g^2+\frac{\pi^2z^2}{l^2}}$$

$$=\frac{2l\,\varphi(x)}{\pi}\tan^{-1}\frac{\pi z}{gl}.$$

Supponiamo α e $-\beta$ essere i limiti di z; otteniamo così

$$\frac{2l\varphi(x)}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{\pi\alpha}{gl}+\tan^{-1}\frac{\pi\beta}{gl}\right\}.$$

Quindi, finalmente, supponendo che g svanisca, abbiamo $2l\varphi(x)$. Così se x giace tra $-l$ ed l,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi(v)\,dv+\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_{-l}^{l}\varphi(v)\cos\frac{n\pi(v-x)}{l}\,dv.$$

Se però $x=l$ o $-l$, allora l'integrale nel primo membro ha la sua parte sensibile quando v è indefinitamente vicino ad l o a $-l$; dovremmo allora eseguire il procedimento precedente per tutti e due i casi, ma l'integrale rispetto a z si estenderebbe solamente nel primo caso da $-\beta$ a 0, e nel secondo da 0 ad α. Quindi invece di $2l\varphi(l)$ nel primo membro, avremmo

$$l\varphi(l)+l\varphi(-l).$$

Così abbiamo determinato il valore del secondo membro quando x giace tra l e $-l$, l'uno e l'altro inclusivamente; il suo valore negli altri casi sarà determinato nell'Art. 311.

305. Nello stesso modo che si è trovato il risultato nell'Art. 304, abbiamo, se s'integra tra 0 ed l,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2l}\int_0^l\varphi(v)\,dv+\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_0^l\varphi(v)\cos\frac{n\pi(v-x)}{l}\,dv\ \ldots(1);$$

ciò vale se x ha un valore qualunque tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(l)$. Così abbiamo determinato il valore del secondo membro quando x giace tra l e $-l$,

l'uno e l'altro inclusivamente; il suo valore negli altri casi sarà determinato nell'Art. 311.

Similmente

$$0=\frac{1}{2l}\int_0^l \varphi(v)\,dv+\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_0^l \varphi(v)\cos\frac{n\pi(v+x)}{l}\,dv\ \ldots\ldots\ldots(2);$$

questo vale per ogni valore di x tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(l)$.

Da (1) e (2) con l'addizione

$$\varphi(x)=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(v)\,dv+\frac{2}{l}\Sigma_1^\infty\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l\cos\frac{n\pi v}{l}\varphi(v)\,dv\ \ldots(3).$$

Ciò vale per ogni valore di x tra 0 ed l, l'uno e l'altro inclusivamente.

Da (1) e (2) con la sottrazione

$$\varphi(x)=\frac{2}{l}\Sigma_1^\infty\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\int_0^l\operatorname{sen}\frac{n\pi v}{l}\varphi(v)\,dv\ \ldots\ldots(4).$$

Questo vale per ogni valore di x tra 0 ed l, l'uno e l'altro esclusivamente; e quando $x=0$ o l, il primo membro sarebbe zero.

L'equazione (4) coincide con la Formola di Lagrange.

Possiamo osservare che ciascuna delle formole (3) o (4) si può dedurre dall'altra. Supponiamo che si prenda (3) e si scriva $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\varphi(x)$ invece di $\varphi(x)$. Così

$$\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\varphi(x)=\frac{1}{l}\int_0^l\operatorname{sen}\frac{\pi v}{l}\varphi(v)\,dv$$
$$+\frac{2}{l}\Sigma_1^\infty\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l\cos\frac{n\pi v}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi v}{l}\varphi(v)\,dv.$$

Ora $\cos\frac{n\pi v}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi v}{l}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi v}{l}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi v}{l}$; e quindi si troverà che il risultato si può esibire nel seguente modo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\varphi(x) =$$

$$\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\left\{\cos\frac{(n-1)\pi x}{l}-\cos\frac{(n+1)\pi x}{l}\right\}\int_0^l \operatorname{sen}\frac{n\pi v}{l}\varphi(v)\,dv;$$

ancora $\cos\frac{(n-1)\pi x}{l}-\cos\frac{(n+1)\pi x}{l}=2\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}$;

e quindi con la divisione per $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}$ otteniamo la formola (4).

Daremo ora alcuni esempii.

306. Sviluppare x in una serie di seni. Si prenda la formola (4) dell'Art. 305, e si supponga $l=\pi$; allora

$$\int v\operatorname{sen} nv\,dv=-\frac{v\cos nv}{n}+\frac{\operatorname{sen} nv}{n^2};$$

onde $\int_0^\pi v\operatorname{sen} nv\,dv=\frac{\pi}{n}$ se n è dispari, e $-\frac{\pi}{n}$ se n è pari.

Così

$$x=2\left\{\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x+\ldots\ldots\right\}.$$

Questo risultato vale per i valori di x tra 0 e π, e siccome i due membri svaniscono con x esso vale quando $x=0$; ed è chiaro che se esso vale per un valore positivo di x vale ancora per il corrispondente valore negativo; quindi esso vale per i valori di x tra $-\pi$ e π, eccettuati questi valori limiti.

307. Sviluppare $\cos x$ in una serie di seni. Si prenda la formola (4) dell'Art. 205 e si supponga $l=\pi$; allora

$$\int\cos v\operatorname{sen} nv\,dv=\frac{1}{2}\int\{\operatorname{sen}(n+1)v+\operatorname{sen}(n-1)v\}\,dv$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(n+1)v}{n+1}+\frac{\cos(n-1)v}{n-1}\right\};$$

onde $\int_0^\pi \cos v \operatorname{sen} nv \, dv = 0$ se n è dispari,

$$= \frac{2n}{n^2-1} \text{ se } n \text{ è pari;}$$

quindi

$$\cos x = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{4}{3}\operatorname{sen} 2x + \frac{8}{15}\operatorname{sen} 4x + \dots + \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} n \operatorname{sen} nx + \dots\right\}.$$

Ciò vale da $x=0$ ad $x=\pi$, esclusi questi valori limiti.

308. Sviluppare x in una serie di coseni.

Si prenda la formola (3) dell'Art. 305, e si supponga $l=\pi$; allora

$$\int v \cos nv \, dv = \frac{v \operatorname{sen} nv}{n} + \frac{\cos nv}{n^2};$$

quindi $\int_0^\pi v \cos nv \, dv = 0$ se n è pari, e $-\frac{2}{n^2}$ se n è dispari; ed

$$\int_0^\pi v dv = \frac{\pi^2}{2},$$

così $\quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots\right\}.$

Ciò vale da $x=0$ ad $x=\pi$ l'uno e l'altro inclusivamente.

Se poniamo $x=\frac{\pi}{2}-y$, si ottiene la formola seguente, la quale vale per ogni valore di y tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, l'uno e l'altro inclusivamente,

$$y = \frac{4}{\pi}\left\{\operatorname{sen} y - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen} 3y + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen} 5y - \dots\right\}.$$

309. Sviluppare $e^{ax}-e^{-ax}$ in una serie di seni.

Qui $\int_0^\pi (e^{av}-e^{-av}) \operatorname{sen} nv \, dv = -\frac{n\,(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{a^2+n^2}\cos n\pi.$

Quindi $\frac{\pi}{2}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{\operatorname{sen} x}{1^2+a^2}-\frac{2\operatorname{sen} 2x}{2^2+a^2}+\frac{3\operatorname{sen} 3x}{3^2+a^2}-\ldots\ldots$

310. Sviluppare $e^{a(\pi-x)}+e^{-a(\pi-x)}$ in una serie di coseni.

Qui $\int_0^\pi \{e^{a(\pi-v)}+e^{-a(\pi-v)}\}\cos nv\,dv=\frac{a(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{a^2+n^2}$,

ed $\int_0^\pi \{e^{a(\pi-v)}+e^{-a(\pi-v)}\}\,dv=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a}$.

Onde $\frac{\pi}{2a}\frac{e^{a(\pi-x)}+e^{-a(\pi-x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{2a^2}+\frac{\cos x}{1^2+a^2}+\frac{\cos 2x}{2^2+a^2}+\ldots\ldots$

311. Abbiamo mostrato che la formola (3) dell'Art. 305 vale per ogni valore di x tra 0 ed l l'uno e l'altro inclusivamente; è facile determinare a che sia eguale il secondo membro quando x cade fuori di questi limiti. Si supponga x positivo, e tra l e $2l$; si ponga $x=2l-x'$ sicchè x' è minore di l, allora

$$\cos\frac{n\pi x}{l}=\cos\left(2n\pi-\frac{n\pi x'}{l}\right)=\cos\frac{n\pi x'}{l};$$

quindi il valore del secondo membro è $\varphi(x')$. In seguito supponiamo x maggiore di $2l$; e supponiamolo eguale a $2ml+x'$, in cui x' è minore di $2l$; allora

$$\cos\frac{n\pi x}{l}=\cos\frac{n\pi x'}{l},$$

sicchè il valore è lo stesso che si avrebbe ponendo x' in vece di x; cioè, il valore è $\varphi(x')$ se x' è minore di l, e $\varphi(2l-x')$ se x' è maggiore di l.

È chiaro che per un valore negativo qualunque di x il valore è lo stesso che per il corrispondente valore positivo.

Similmente possiamo mostrare che se x è positivo ed $=2ml+x'$, il valore del secondo membro dell'equazione (4) dell'Art. 305 è lo stesso come se x' si ponesse in vece di x, ed è $\varphi(x')$ se x' è minore di l, e $-\varphi(2l-x')$ se x' è maggiore di l. E per valori negativi di x il valore è lo stesso numericamente come per il corrispondente valore positivo, ma con un segno opposto.

312. Si può osservare che nella dimostrazione fondamentale dell'Art. 304, supponiamo che quando h si avvicina all'unità come limite, l'espressione

$$\int h^n \varphi(v) \cos \frac{n\pi(v-x)}{l} dv$$

possa essere rimpiazzata da

$$\int \varphi(v) \cos \frac{n\pi(v-x)}{l} dv,$$

comunque grande sia n. Possiamo mostrare che non si commette errore con questa supposizione, dimostrando che l'ultimo integrale svanisce quando n cresce indefinitamente. Abbiamo

$$\int \varphi(v) \cos \frac{n\pi(v-x)}{l} dv = \frac{l\varphi(v)}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{n\pi(v-x)}{l}$$
$$- \frac{l}{\pi n} \int \varphi'(v) \operatorname{sen} \frac{n\pi(v-x)}{l} dv,$$

il che mostra che l'integrale nel primo membro svanirà quando n è infinito, almeno se $\varphi'(v)$ non è infinito.

313. Non abbiamo ancora fatto allusione ad uno dei punti più osservabili in relazione con le formole (3) e (4) dell'Art. 305. In queste formole $\varphi(x)$ non è necessario che sia una *funzione continua;* per esempio, da $x=0$ ad $x=a$ possiamo avere $\varphi(x)=f_1(x)$, indi da $x=a$ ad $x=b$ possiamo avere $\varphi(x)=f_2(x)$, poscia da $x=b$ ad $x=c$ possiamo avere $\varphi(x)=f_3(x)$, quindi da $x=c$ ad $x=l$ possiamo avere $\varphi(x)=f_4(x)$. La formola (3) per esempio sarebbe sempre vera per tutti i valori di x tra 0 ed l inclusivamente, come è evidente dal modo della dimostrazione, *eccetto* per i valori nei quali ha luogo la discontinuità. Quando per esempio $x=a$, allora il valore del secondo membro non sarebbe $f_1(a)$ o $f_2(a)$ ma $\frac{1}{2}\{f_1(a)+f_2(a)\}$. Quindi se per $x=a$ abbiamo $f_1(x)=f_2(x)$, la formola vale anche quando $x=a$.

314. Trovare un'espressione che sia eguale a c quando x cade tra 0 ed a, ed eguale a zero quando x cade tra a ed l.

Si prenda la formola (3) dell'Art. 305. Quì $\varphi(v) = c$ da $v = 0$ a $v = a$, e poi è zero da $v = a$ a $v = l$; così

$$\int_0^l \cos\frac{n\pi v}{l}\,\varphi(v)\,dv$$

diviene $$c\int_0^a \cos\frac{n\pi v}{l}\,dv = \frac{cl}{n\pi}\,\text{sen}\,\frac{n\pi a}{l},$$

quindi l'espressione richiesta è

$$\frac{ca}{l} + \frac{2c}{\pi}\left\{\text{sen}\,\frac{\pi a}{l}\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\frac{2\pi a}{l}\cos\frac{2\pi x}{l}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\,\text{sen}\,\frac{3\pi a}{l}\cos\frac{3\pi x}{l} + \ldots\right\};$$

questa darà $\frac{1}{2}c$ quando $x = a$.

O pure possiamo usare la formola (4) dell'Art. 305. Allora

$$c\int_0^a \text{sen}\,\frac{nv\pi}{l}\,dv = \frac{cl}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{na\pi}{l}\right),$$

ed abbiamo per l'espressione richiesta

$$\frac{2c}{\pi}\left\{\text{vers}\,\frac{\pi a}{l}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2}\,\text{vers}\,\frac{2\pi a}{l}\,\text{sen}\,\frac{2\pi x}{l}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\,\text{vers}\,\frac{3\pi a}{l}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{l} + \ldots\ldots\right\};$$

questa dà 0 quando $x = 0$, ed $\frac{1}{2}c$ quando $x = a$.

315. Trovare un'espressione che sia eguale a kx da $x = 0$ ad $x = \frac{l}{2}$, ed eguale a $k(l - x)$ da $x = \frac{l}{2}$ ad $x = l$.

Quì

$$\int_0^l \varphi(v)\cos\frac{n\pi v}{l}\,dv = \int_0^{\frac{l}{2}} kv\cos\frac{n\pi v}{l}\,dv + \int_{\frac{l}{2}}^l k(l-v)\cos\frac{n\pi v}{l}\,dv$$

$$= \frac{kl^2}{\pi}\left\{\frac{1}{2n}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2\pi}\right\} + \frac{kl^2}{n\pi}\left(\text{sen}\,n\pi - \text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$- \frac{kl^2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\,\text{sen}\,n\pi - \frac{1}{2n}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos n\pi}{n^2\pi} - \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi}\right\}$$

$$= \frac{kl^2}{\pi^2 n^2}\left\{2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right\}.$$

Questo è $-\frac{4kl^2}{\pi^2 n^2}$ quando n è della forma $4r+2$, e 0 in ogni altro caso, ed

$$\int_0^l \varphi(v)\,dv = k\int_0^{\frac{l}{2}} v\,dv + k\int_{\frac{l}{2}}^l (l-v)\,dv = \frac{kl^2}{4};$$

così l'espressione richiesta è

$$\frac{kl}{4} - \frac{8kl}{\pi^2}\left\{\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{l} + \dots\right\}.$$

Se dinotiamo questa con y, allora da $x=0$ ad $x=\frac{1}{2}l$ l'uno e l'altro inclusivamente $y=kx$, indi da $x=\frac{1}{2}l$ ad $x=l$ l'uno e l'altro inclusivamente $y=k(l-x)$; per valori di x maggiori di l i valori di y ricorrono come si è mostrato nell'Art. 311. Così il valore di y è l'ordinata della figura formata misurando dall'origine lunghezze eguali lungo l'asse delle x a dritta e a sinistra, e descrivendo su ciascuna base così ottenuta lo stesso triangolo isoscele.

Come un altro esempio possiamo proporre il seguente: trovare una funzione $\varphi(x)$ che sia eguale ad x da $x=0$ ad $x=\alpha$, indi eguale ad α da $x=\alpha$ ad $x=\pi-\alpha$, e poscia eguale a $\pi-x$ da $x=\pi-\alpha$ ad $x=\pi$.

Il risultato è

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}x + \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}3\alpha\operatorname{sen}3x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}5\alpha\operatorname{sen}5x + \dots\right\};$$

questo è vero da $x=0$ ad $x=\pi$ l'uno e l'altro inclusivamente.

Lo studente può verificare gli esempii seguenti.

Se x è numericamente minore di a l'espressiono

$$\frac{8a}{\pi^2}\Sigma_0^\infty \left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi x}{2a}}{2n+1}\right\}^2$$

è eguale ad $a-x$ se x è positivo, ed $a+x$ se x è negativo.

Dimostrare che per i valori di x tra $-\pi$ e π inclusivamente

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots\dots$$

Ciò può ottenersi dall' Art. 308 con l'integrazione; o dall'equazione (3) dell'Art. 305.

316. Si possono dare altre formole analoghe a quelle nell'Art. 305; ne ricercheremo qui alcune. Abbiamo dall'Art. 305

$$\varphi(x)=\frac{1}{2l}\int_0^l \varphi(v)\,dv+\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_0^l \varphi(v)\cos\frac{n\pi(v-x)}{l}\,dv \;\ldots\ldots (1).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 e l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(l)$. Nello stesso modo in cui si ottenne questo risultato possiamo dimostrare ancora che

$$2\varphi(x)=\frac{1}{2l}\int_0^l \varphi(v)\,dv+\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_0^l \varphi(v)\cos\frac{n\pi(v-x)}{2l}\,dv \;\ldots\ldots (2).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\varphi(l)$.

Si sottragga (1) da (2); così

$$\varphi(x)=\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_0^l \varphi(v)\cos\frac{(2n-1)\pi(v-x)}{2l}\,dv \;\ldots (3).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(l)$.

Ora nello stesso modo che si è ottenuto (3), possiamo ottenere il risultato seguente, partendo da $v+x$ in vece di $v-x$,

$$0=\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_0^l \varphi(v)\cos\frac{(2n-1)\pi(v+x)}{2l}\,dv \;\ldots (4).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $-\frac{1}{2}\varphi(l)$.

Da (3) e (4) con l'addizione e la sottrazione otteniamo

$$\varphi(x) = \frac{2}{l} \Sigma_1^\infty \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \int_0^l \varphi(v) \cos\frac{(2n-1)\pi v}{2l} dv \ldots\ldots (5),$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{l} \Sigma_1^\infty \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2} \int_0^l \varphi(v) \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi v}{2l} dv \ldots\ldots (6).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 ed l inclusivamente, eccetto che quando $x=0$ il primo membro di (6) deve essere 0, e quando $x=l$ il primo membro di (5) deve essere 0.

317. Applicheremo la formola (5) dell'articolo precedente a stabilire un teorema osservabile dato per la prima volta da Giovanni Bernoulli. Sia data una curva qualunque AB di cui le tangenti in A e B sono ad angoli retti; si formi l'involuta di questa curva incominciando da A, e sia dinotata da AC; si formi l'involuta di AC incominciando da C; e così di seguito continuamente; allora l'ultima figura ottenuta sarà una cicloide.

Sia s la lunghezza dell'arco della curva primitiva misurato da A ad un punto qualunque P; sia ρ il raggio di curvatura in P, e θ l'inclinazione della tangente in P alla tangente in A. Sia ρ_1 il raggio di curvatura nel punto corrispondente della prima involuta, ρ_2 quello della seconda involuta, ρ_3 quello della terza involuta; e così di seguito. Allora θ esprime l'inclinazione di $\rho, \rho_2, \rho_4, \ldots$ alla normale della curva primitiva in A; e θ esprime ancora l'inclinazione di $\rho_1, \rho_3, \rho_5, \ldots$ alla normale della curva primitiva in B. Inoltre $\rho_1, \rho_3, \rho_5, \ldots$ svaniscono quando $\theta=0$; e $\rho_2, \rho_4, \rho_6, \ldots$ svaniscono quando $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Ora $\rho=\frac{ds}{d\theta}$, e $\rho_1=s$; così $\rho_1=\int_0^\theta \rho d\theta$.

Similmente,

$$\rho_2=\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \rho_1 d\theta,$$

$$\rho_3=\int_0^\theta \rho_2 d\theta,$$

$$\rho_4=\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \rho_3 d\theta,$$

e così di seguito.

Ora nella formola (5) dell'articolo precedente supponiamo $l = \frac{\pi}{2}$; allora siccome ρ è una funzione di θ, abbiamo

$$\rho = A_1 \cos\theta + A_3 \cos 3\theta + A_5 \cos 5\theta + \ldots.$$

in cui $A_1, A_3, A_5, \ldots$ sono certe costanti determinate da quella formola (5).

Così

$$\rho_1 = A_1 \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3} A_3 \operatorname{sen} 3\theta + \frac{1}{5} A_5 \operatorname{sen} 5\theta + \ldots\ldots$$

$$\rho_2 = A_1 \cos\theta + \frac{1}{3^2} A_3 \cos 3\theta + \frac{1}{5^2} A_5 \cos 5\theta + \ldots\ldots$$

$$\rho_3 = A_1 \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3^3} A_3 \operatorname{sen} 3\theta + \frac{1}{5^3} A_5 \operatorname{sen} 5\theta + \ldots\ldots$$

....

Procedendo in tal modo otteniamo, quando n è indefinitamente grande,

$$\rho_n = A_1 \operatorname{sen}\theta, \quad \text{o} \quad \rho_n = A_1 \cos\theta;$$

e queste equazioni rappresentano una cicloide; si vegga l'Art. 105.

Possiamo procedere ad esaminare la natura del risultato quando le tangenti nelle estremità della curva primitiva non sono inclinate ad angolo retto. Supponiamo queste tangenti inclinate sotto un angolo α; e si ponga α per l nella formola (5) dell'articolo precedente. Allora abbiamo

$$\rho = A_1 \cos\frac{\pi\theta}{2\alpha} + A_3 \cos\frac{3\pi\theta}{2\alpha} + A_5 \cos\frac{5\pi\theta}{2\alpha} + \ldots\ldots;$$

e procedendo nello stesso modo come sopra arriviamo al risultato

$$\rho_n = k \cos\frac{\pi\theta}{2\alpha}, \quad \text{o} \quad \rho_n = k \operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{2\alpha},$$

in cui $$k = A_1 \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^n.$$

Se k fosse una quantità *finita*, otterremmo così un'epicicloide se α è maggiore di $\frac{\pi}{2}$, ed un'ipocicloide in cui il diametro del circolo mobile è minore del raggio del circolo fisso se α è minore di $\frac{\pi}{2}$; si veggano gli Art. 110 e 111; ed in questo modo si sogliono enunciare i risultati. Ma si dovrà osservare che k diviene indefinitamente grande nel primo caso ed indefinitamente piccolo nel secondo; sicchè nel primo caso si dovrà supporre che i raggi del circolo fisso e del circolo mobile crescano indefinitamente, e nel secondo caso che diminuiscano indefinitamente.

318. Nella formola

$$\varphi(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \varphi(v)\,dv + \frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi(v-x)}{l}\,\varphi(v)\,dv,$$

supponiamo che l cresca senza limite; allora se $\varphi(v)$ è tale che il termine $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi(v)\,dv$ svanisca con $\frac{1}{l}$ abbiamo

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \cos u\,(v-x)\,\varphi(v)\,du\,dv.$$

Questo si chiama il Teorema di Fourier.

ESEMPII DIVERSI.

1. Cambiare l'ordine dell'integrazione nell'espressione

$$\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{(a^2-x^2)}} \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

2. Cambiare l'ordine dell'integrazione nell'espressione

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{(2ax-x^2)}}^{\sqrt{(4ax)}} \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

3. Trasformare $\int_0^c \int_{ax}^{bx} \varphi(x, y)\,dx\,dy$ in un integrale rispetto ad u e v, essendo $u = y + x$, $y = uv$; e determinare i limiti del nuovo integrale.

4. Trasformare $\int_0^a\int_0^b \varphi(x, y)\, dx\, dy$ in un integrale rispetto ad u e v, essendo $y+cx=u$, $y=uv$; e determinare i limiti del nuovo integrale.

5. Trasformare l'integrale

$$\iiint (x-y)(y-z)(z-x)\, dx\, dy\, dz$$

in un altro nel quale u, v, w, sono le variabili indipendenti, essendo

$$u^3 = xyz,\ \frac{1}{v} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},\quad w^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

6. Dimostrare che

$$\left\{\int_0^\infty e^{-\tau}\, dx\right\}^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\, dx \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}},$$

in cui $t = x^n$ e $\tau = t^2$.

(Si veggano gli Art. 263 e 66; e si trasformi come nell'Art. 242).

7. Dimostrare trasformando l'espressione da coordinate rettangolari a polari che il valore dell'integrale definito

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^4+2x^2y^2\cos\alpha+y^4)}\, dx\, dy$$

è eguale ad $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\, F\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$, in cui $F\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$ dinota una funzione ellittica completa del primo ordine di cui $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ è il modulo.

8. Dimostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta \log\cot\theta\, d\theta = \frac{\pi^2}{48}$.

9. Dimostrare che

$$\int_0^\infty e^{-x^2 n \cot 2\beta} \operatorname{sen}(nx^2+\alpha)\, dx = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\sqrt{\left(\frac{\pi \operatorname{sen} 2\beta}{4n}\right)}.$$

10. Mostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{-1}\{n\sqrt{(1-\tan^2 x)}\}\,dx = \frac{\pi}{2}\tan^{-1} n\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\cot^{-1}\frac{\sqrt{(1+n^2)}}{n}.$$

11. Se $f(\xi) = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\xi \tan\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$, determinare il significato geometrico dell'equazione $y = xf(\operatorname{sen} x)$.

12. Una curva di doppia curvatura gira intorno l'asse delle x; mostrare che la superficie generata

$$= 2\pi\int \sqrt{\{(y\,dy + z\,dz)^2 + (y^2+z^2)(dx)^2\}}.$$

CAPITOLO XIV.

APPLICAZIONE DEL CALCOLO INTEGRALE ALLE QUISTIONI DEL VALORE MEDIO E DELLA PROBABILITÀ.

319. Daremo qui alcuni pochi esempii dell'applicazione del Calcolo Integrale alle quistioni relative al *valore medio* ed alla *probabilità*.

Dinoti $\varphi(x)$ una funzione qualunque di x, e supponiamo x successivamente eguale ad a, $a+h$, $a+2h, \ldots a+(n-1)h$. Allora

$$\frac{\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\ldots+\varphi\{a+(n=1)h\}}{n}$$

si può dire essere il *medio* degli n valori che $\varphi(x)$ riceve corrispondenti agli n valori di x. Sia

$$b-a=nh\,,$$

allora il suddetto *valore medio* si può scrivere così,

$$\frac{[\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\ldots+\varphi\{a+(n-1)h\}]\,h}{b-a}.$$

Supponiamo che a e b restino fissi ed n cresca indefinitamente; allora il limite dell'espressione precedente è

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)\,dx}{b-a}.$$

Questo si può convenevolmente definire essere il *valore medio* di $\varphi(x)$ quando x varia continuamente tra a e b.

320. Come un esempio possiamo prendere la quistione seguente; trovare la media distanza di tutt'i punti dentro di un circolo da un punto fisso nella circonferenza. Con questo enunciato intendiamo che debba seguirsi il seguente procedimento. Sia divisa l'area del circolo in un grande numero n di piccole aree eguali; si formi una frazione di cui il numeratore sia la somma delle distanze di queste piccole aree da un punto fisso nella circonferenza, ed il denominatore sia n; indi si prenda il limite di questa frazione quando n è infinito.

Supponiamo che $r_1, r_2, \ldots r_n$ dinotino le distanze rispettive delle piccole aree; allora la frazione richiesta è

$$\frac{1}{n}\{r_1 + r_2 + \ldots + r_n\}.$$

Si moltiplichi il numeratore ed il denominatore per $r\Delta\theta\,\Delta r$, che rappresenta l'area di un piccolo elemento (Art. 148), così la frazione diviene

$$\frac{\{r_1 + r_2 + \ldots + r_n\}\,r\Delta\theta\,\Delta r}{nr\,\Delta\theta\,\Delta r}.$$

Il limite del denominatore rappresenterà l'area del circolo cioè, πc^2, se c è il raggio del circolo. Il limite del numeratore sarà, per le definizioni del Calcolo Integrale, $\iint r^2 d\theta\, dr$, i limiti essendo presi in modo da includere tutti gli elementi dell'area dentro al contorno del circolo. Così il risultato è

$$\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2c\cos\theta} r^2\, d\theta\, dr}{\pi c^2}.$$

Questo si troverà dare $\frac{32c}{9\pi}$.

321. L'equazione di una curva è $r = c \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, trovare la *lunghezza media* di tutt'i raggi vettori condotti ad eguali intervalli angolari nel primo quadrante.

Segue facilmente, come nell'ultimo articolo, che la richiesta *lunghezza media* è

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} c \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2}},$$

cioè, $\frac{c}{\pi}$

Ancora, supponiamo che la porzione di questa curva che giace nel primo quadrante giri intorno alla linea iniziale, e così generi una superficie. Si tirino dei raggi vettori dall'origine ai differenti punti della superficie *uniformemente in tutte le direzioni*: si voglia trovare la lunghezza media dei raggi vettori.

La sola difficoltà in questa quistione sta nell'intendere chiaramente il significato delle parole in carattere Italico. Si concepisca una superficie sferica con l'origine come centro; allora per uniforme distribuzione angolare dei raggi vettori, intendiamo che essi siano condotti in modo che il numero di quelli che cadono sopra una porzione qualunque della superficie sferica sia proporzionale all'area di quella porzione. Ora l'area di una porzione di una sfera di raggio a si ottiene integrando

$$a^2 \iint \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta$$

tra i limiti convenienti (Art. 175). Quindi $a^2 \operatorname{sen}\theta \, \Delta\varphi \, \Delta\theta$ si può prendere per dinotare un elemento di una superficie sferica, e $2\pi a^2$ è l'area della metà della superficie della sfera. Così avremo pel risultato richiesto

$$\frac{\iint a^2 c \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta}{2\pi a^2},$$

i limiti essendo presi in modo da estendere le integrazioni sull'intera superficie che si considera.

Quindi otteniamo

$$\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} c \operatorname{sen}^2 \theta \cos\theta \, d\varphi \, d\theta}{2\pi},$$

cioè, $\frac{c}{3}$.

322. Un'ampia area piana è rigata con linee parallele ad eguale distanza; una sottile bacchetta, di cui la lunghezza è minore della distanza tra due linee consecutive, è gittata all'avventura sull'area; trovare la probabilità che la bacchetta cada attraverso una delle linee.

Sia $2a$ la distanza tra due linee consecutive e $2c$ la lunghezza della bacchetta. Si vede facilmente che non alteriamo il problema supponendo il centro della bacchetta costretto a cadere sopra una linea condotta tra linee consecutive del dato sistema ad angoli retti su di esse, poichè la proporzione dei casi favorevoli all'intero numero dei casi rimane la stessa dopo questa limitazione come prima.

Sia il centro della bacchetta ad una distanza x dalla più vicina delle due parallele prescelte; indi supponiamo che la bacchetta giri intorno al suo centro, ed è chiaro che in questa posizione del suo centro la probabilità che essa attraversi la linea è $\frac{4\varphi}{2\pi}$, in cui

$$c \cos\varphi = x.$$

E possiamo dinotare con $\frac{\Delta x}{a}$ la probabilità che il centro della bacchetta cada tra le distanze x ed $x + \Delta x$ dalla più vicina delle due parallele. Così la probabilità richiesta sarà dinotata dal limite della somma delle quantità come $\frac{2\varphi}{\pi} \frac{\Delta x}{a}$ cioè, sarà

$$\frac{2}{\pi a}\int \varphi \, dx,$$

in cui $\cos\varphi = \frac{x}{c}$.

I limiti di x sono 0 e c; quindi il risultato

$$= \frac{2c}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{2c}{\pi a}.$$

ESEMPII.

1. Se $r = f(\theta)$ ed $y = f\left(\frac{x}{a}\right)$ sono le equazioni di due curve, $f(\theta)$ essendo una funzione che svanisce per i valori θ_1, θ_2, ed è positiva per tutt'i valori tra questi limiti, e se A è l'area della prima tra i limiti $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$, ed M la media aritmetica di tutte le sezioni trasversali del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle x della porzione della seconda curva tra i limiti $x = a\theta_1$ ed $x = a\theta_2$, mostrare che

$$M = \frac{2\pi}{\theta_2 - \theta_1} A,$$

supposto θ_2 maggiore di θ_1.

2. Una palla è tirata all'avventura da un'arme a fuoco che con eguale probabilità si può presentare in una direzione qualunque nello spazio al di sopra dell'orizzonte; mostrare che la probabilità di giungere al di là di $\frac{1}{m}$ della sua massima portata è $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{m}\right)}$.

3. Da un punto nella circonferenza di un campo circolare è gittato all'avventura un proiettile con una data velocità, la quale è tale che il diametro del campo è eguale alla massima portata del proiettile; trovare la probabilità che esso cada dentro del campo.

Risultato. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}(\sqrt{2} - 1)$.

4. Sopra una tavola è tracciata una serie di linee rette ad eguali distanze l'una dall'altra, e si gitta un cubo all'avventura sulla tavola. Supponendo la diagonale del cubo minore della distanza tra le linee consecutive, trovare la probabilità che il cubo si fermi senza coprire alcuna parte delle linee.

Risultato. $\frac{4a}{c\pi}$, in cui a è il lato del cubo e c la distanza delle linee consecutive.

5. Dimostrare che il medio di tutt'i raggi vettori di un'ellisse, il fuoco essendo l'origine, è eguale alla metà dell'asse minore, quando le linee sono tirate ad eguali intervalli angolari; ed è eguale alla metà dell'asse maggiore quando le linee sono tirate in modo che le ascisse delle loro estremità crescano uniformemente.

6. Un numero indefinito di linee parallele ad eguali distanze sono tracciate su di un piano, ed una bacchetta la di cui lunghezza è eguale ad r volte la distanza perpendicolare tra due linee consecutive è gittata all'avventura sul piano; trovare la probabilità che essa cada sopra n delle linee. Se $n = r = 1$, mostrare che la probabilità è $\frac{2}{\pi}$.

7. Due frecce sono infisse in uno scudo circolare; quale è la probabilità che la loro distanza sia maggiore del raggio dello scudo?

Risultato. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

8. Supponendo le orbite delle comete uniformemente distribuite nello spazio, dimostrare che la loro inclinazione media al piano dell'eclittica è l'angolo sotteso da un arco eguale al raggio.

9. Un certo territorio è limitato da due circoli meridiani e da due paralleli di latitudine che differiscono in longitudine e latitudine rispettivamente di un grado, e si conosce che esso giace tra certi limiti di latitudine; trovare la probabile area superficiale.

10. Si prende una linea di data lunghezza a, e si prendono due altre linee ciascuna minore della prima linea le quali si lasciano cadere su di essa all'avventura, ogni posizione di ciascuna essendo tanto probabile quanto ogni altra. Le lunghezze di queste linee sono b e b'; si cerca la probabilità che esse non abbiano una parte eccedente c in comune.

Risultato. $\dfrac{(a-b-b'+c)^2}{(a-b)(a-b')}$.

Camb. Phil. Transactions, Vol. VIII. p. 386.

11. Un'area piana indefinitamente ampia è rigata con linee parallele ad eguali distanze, la distanza tra le linee consecutive essendo c. Una curva chiusa senza punti singolari il di cui massimo diametro è minore di c si getta sull'area. Mostrare che la probabilità per la curva di cadere sopra una delle linee è $\dfrac{l}{\pi c}$, in cui l dinota il perimetro della curva.

12. Un messaggiere M muove da A verso B (distanza a) alla ragione di v miglia all'ora, ma prima che arrivi in B un nembo di pioggia incomincia in A ed in tutt'i luoghi occupando una certa distanza z verso, ma non giungendo al di là, B, e si muove alla ragione di u miglia all'ora verso A; se M fosse colto in questo nembo sarebbe obbligato di fermarsi finchè esso passasse oltre; egli inoltre deve ricevere pel suo messaggio un numero di scellini inversamente proporzionale al tempo occupato in esso, alla ragione di n scellini all'ora. Supponendo ignota la distanza z, come anche il tempo nel quale incominciò la pioggia, ma che tutti gli eventi siano egualmente probabili, mostrare che il valore dell'aspettativa di M è, in scellini,

$$\frac{nv}{a}\left\{\frac{1}{2}-\frac{u}{v}+\frac{u(u+v)}{v^2}\log\frac{u+v}{u}\right\}.$$

CAPITOLO XV.

CALCOLO DELLE VARIÁZIONI.

Massimi e Minimi degl' integrali che contengono una variabile dipendente con limiti fissi.

323. La teoria dei valori massimi e minimi di date funzioni è considerata completamente nelle opere sul Calcolo Differenziale. Se, per esempio, y dinota una data funzione di una variabile indipendente x, allora possiamo trovare il valore o i valori di x che rendono y un massimo o un minimo, o pure possiamo far vedere che non vi sono di tali valori in alcuni casi.

Intanto andiamo ora a considerare una nuova classe di problemi di massimi o minimi. Dinoti y una funzione di x che è per ora indeterminata; e dinoti V una data funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ Supponiamo che si voglia trovare la relazione che deve passare tra x ed y affinchè l'integrale $\int Vdx$, preso tra dati limiti, possa avere un valore massimo o minimo. Quì non possiamo effettuare l'integrazione poichè y non è conosciuta come una funzione di x, e quindi V non è conosciuta come una funzione di x; così gli ordinarii metodi per risolvere i problemi di massimi o minimi non possono applicarsi. Si richiede allora un nuovo metodo, che procediamo ora a spiegare.

324. La branca dell'analisi alla quale andiamo ad introdurre lo studente si chiama il *Calcolo delle Variazioni;* il suo oggetto si è di trovare i valori massimi o minimi delle espressioni integrali, supponendo che le espressioni variino

con l'assegnare differenti *forme* alle funzioni dinotate dalle variabili dipendenti. Si vedrà, a misura che procediamo, che il metodo per trovare questi valori massimi o minimi è analogo a quello col quale si trovano gli ordinarii valori massimi o minimi nel Calcolo Differenziale.

325. Sarà utile di ricorrere al metodo dato nel Calcolo Differenziale. Lo studente si ricorderà che i termini *massimo* e *minimo* sono termini tecnici, i quali sono definiti ed illustrati nei trattati sul Calcolo Differenziale; ed essi sono adoperati in matematica nel senso ivi a loro assegnato. Sovente si commettono errori confondendo *un valore massimo* nel senso tecnico della parola massimo, con *il valore più grande* nel senso ordinario delle parole il più grande.

Si supponga y una data funzione di una variabile indipendente x; allora se un cambiamento indefinitamente piccolo si dà ad x, in generale si ha per conseguenza un cambiamento indefinitamente piccolo in y, il quale è comparabile in grandezza con quello dato ad x. Il procedimento per trovare un valore massimo o minimo di y si può dire che consista di due parti. Prima determiniamo un valore di x tale che un cambiamento indefinitamente piccolo in esso non produce in y un comparabile cambiamento indefinitamente piccolo, ma un cambiamento che è indefinitamente piccolo paragonato con quello di x. In secondo luogo, esaminiamo il segno di questo cambiamento indefinitamente piccolo proveniente in y dal cambiamento di x; e per un massimo questo segno deve essere necessariamente negativo, e per un minimo positivo.

Possiamo adunque descrivere brevemente questo procedimento così; facciamo sparire i termini del primo ordine nel cambiamento della variabile dipendente, ed esaminiamo il segno dei termini del secondo ordine. Seguiremo un metodo analogo nel problema che dobbiamo ora discutere; ci limitiamo, intanto, per ora interamente alla prima parte del procedimento, e ricorreremo in appresso alla seconda parte.

326. Dobbiamo in prima spiegare la notazione che sarà adoperata. Dinotino x una variabile indipendente, y una funzione qualunque di x, e $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... i coefficienti dif-

ferenziali di y rispetto ad x. Adopreremo δy per dinotare una quantità indefinitamente piccola la quale può essere una funzione qualunque di x; e se u dinota una quantità qualsivoglia che dipende da y dinoteremo con δu l'incremento che riceve u quando y si muta in $y+\delta y$. Così, per esempio, si consideri il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$; quando y riceve l'incremento δy questo coefficiente differenziale riceve l'incremento $\frac{d\delta y}{dx}$, sicchè con $\delta\frac{dy}{dx}$ intendiamo $\frac{d\delta y}{dx}$. È spesso conveniente di usare il simbolo p per $\frac{dy}{dx}$; e così ancora δp è un simbolo conveniente per $\frac{d\delta y}{dx}$. In seguito, si consideri il secondo coefficiente differenziale $\frac{d^2y}{dx^2}$; quando y riceve l'incremento δy questo secondo coefficiente differenziale riceve l'incremento $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, e siccome il secondo coefficiente differenziale è spesso dinotato da q possiamo convenientemente usare δq per $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$. Similmente r ed s si possono usare per il terzo ed il quarto coefficiente differenziale di y rispettivamente, e δr e δs per $\frac{d^3\delta y}{dx^3}$ e $\frac{d^4\delta y}{dx^4}$ rispettivamente; e così di seguito.

I coefficienti differenziali sono anche spesso indicati, con $y', y'', y''', \ldots$; e così $\delta y', \delta y'', \delta y''', \ldots$ si possono usare come equivalenti a $\delta p, \delta q, \delta r, \ldots$ rispettivamente.

327. L'introduzione del simbolo δ è dovuta a Lagrange. Lo studente vedrà che questo simbolo ha un significato simile a quello del simbolo d, che è usato nel Calcolo Differenziale. Tutti e due dy e δy esprimono incrementi indefinitamente piccoli; dy però è generalmente usato per dinotare il cambiamento in *valore* di una *data* funzione in conseguenza di un cambiamento nel valore della variabile indipendente, δy è usato per dinotare il cambiamento ottenuto attribuendo un cambiamento arbitrario alla *forma* di una funzione. La quantità dinotata da δy si chiama la *variazione* di y.

328. Dinoti V una data funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$; e sia $U=\int_{x_0}^{x_1} V dx$, in cui x_0 ed x_1 si suppongono dinotare limiti dati. Il valore di U non si può trovare sino a che non conosciamo quale funzione particolare sia y di x; ma senza conoscere ciò possiamo ottenere un'espressione per l'incremento proveniente in U dall'attribuire l'incremento arbitrario δy ad y, dalla quale si possono trarre importanti conseguenze.

Supponiamo $\quad V=\varphi(x, y, y', y'', y''', \ldots)$;

allora per definizione

$$\delta V=\varphi(x, y+\delta y,\ y'+\delta y',\ y''+\delta y'',\ y'''+\delta y''', \ldots) \\ -\varphi(x, y, y', y'', y''', \ldots).$$

Il primo termine si può sviluppare con l'ordinaria estensione del teorema di Taylor; così

$$\delta V=\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{dy'}\delta y'+\frac{dV}{dy''}\delta y''+\frac{dV}{dy'''}\delta y'''+\ldots,$$

in cui $\frac{dV}{dy}$ è il coefficiente differenziale parziale di V rispetto ad y, ancora $\frac{dV}{dy'}$ è il coefficiente differenziale parziale di V rispetto ad y'; e così di seguito.

Nell'espressione precedente di δV abbiamo espresso solamente *termini del primo ordine*, cioè, abbiamo omesso i termini del secondo e degli ordini superiori rispetto alle piccole quantità $\delta y, \delta y', \ldots$. Questo continueremo a fare durante il seguito della investigazione.

Allora

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\delta V\cdot dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{dy'}\delta y'+\frac{dV}{dy''}\delta y''+\frac{dV}{dy'''}\delta y'''+\ldots\right\}dx$$

Trasformeremo ora questa espressione con l'integrazione per parti. Per brevità si ponga

$$\frac{dV}{dy} = N, \quad \frac{dV}{dy'} = P, \quad \frac{dV}{dy''} = Q, \quad \frac{dV}{dy'''} = R, \ldots$$

Allora $$\int P\delta y'\, dx = \int P\frac{d\delta y}{dx} dx = P\delta y - \int \frac{dP}{dx}\delta y\, dx;$$

onde $$\int_{x_0}^{x_1} P\delta y' dx = (P\delta y)_1 - (P\delta y)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dP}{dx}\delta y\, dx.$$

Qui $(P\delta y)_1$ è usato per dinotare il valore di $P\delta y$ quando x_1 si pone in vece di x, e $(P\delta y)_0$ è usato per dinotare il valore di $P\delta y$ quando x_0 si pone in vece di x; una simile notazione sarà usata da per tutto. Bisogna osservare accuratamente che $\frac{dP}{dx}$ significa il coefficiente differenziale *completo* di P rispetto ad x, vale a dire, nel formare $\frac{dP}{dx}$ dobbiamo ricordarci che y ed i suoi coefficienti differenziali racchiudono tutti x implicitamente.

Ancora

$$\int Q\delta y'' dx = \int Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} dx = Q\frac{d\delta y}{dx} - \int \frac{dQ}{dx}\frac{d\delta y}{dx} dx$$
$$= Q\frac{d\delta y}{dx} - \frac{dQ}{dx}\delta y + \int \frac{d^2Q}{dx^2}\delta y\, dx;$$

onde

$$\int_{x_0}^{x_1} Q\delta y'' dx = \left(Q\frac{d\delta y}{dx} - \frac{dQ}{dx}\delta y\right)_1 - \left(Q\frac{d\delta y}{dx} - \frac{dQ}{dx}\delta y\right)_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2Q}{dx^2}\delta y\, dx.$$

Similmente

$$\int_{x_0}^{x_1} R\delta y''' dx = \left(R\frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{dR}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\delta y\right)_1 - \left(R\frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{dR}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\delta y\right)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^3R}{dx^3}\delta y\, dx.$$

Questo procedimento si può continuare sino a che tutti i simboli $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$, $\delta y''''$, ... siano tolti da sotto al segno integrale. Si deve osservare che tutti i coefficienti differenziali $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{d^2Q}{dx^2}$, $\frac{dR}{dx}$, $\frac{d^2R}{dx^2}$, $\frac{d^3R}{dx^3}$ sono coefficienti differenziali *completi*.

Quindi finalmente

$$\delta U = \delta y_1 \left\{ P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \dots \right\}_1 - \delta y_0 \left\{ P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \dots \right\}_0$$

$$+ \delta p_1 \left\{ Q - \frac{dR}{dx} + \dots \right\}_1 - \delta p_0 \left\{ Q - \frac{dR}{dx} + \dots \right\}_0$$

$$+ \delta p_1 \{ R - \dots \}_1 - \delta q_0 \{ R - \dots \}_0$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots \right) \delta y \, dx.$$

Quì abbiamo adottato alcune ovvie semplificazioni di notazione; così usiamo δy_1 per $(\delta y)_1$, e δp_1 per $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1$, e così di seguito.

329. Il valore di δU si può dinotare così,

$$\delta U = H_1 - H_0 + \int_{x_0}^{x_1} K \delta y \, dx,$$

in cui H_1 dinota un certo aggregato di termini nei quali x_1 è messo in vece di x, ed H_0 un simile aggregato di termini nei quali x_0 è messo in vece di x; questi aggregati non contengono alcuna integrazione. Inoltre

$$K = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots$$

Poichè $H_1 - H_0$ contiene solamente i valori delle variabili nei *limiti*, parleremo alle volte di $H_1 - H_0$ come dei *termini ai limiti*.

330. Possiamo ora determinare le condizioni che debbono aver luogo affinchè U possa avere un valore massimo o minimo. Infatti affinchè U possa avere un valore massimo o minimo, δU deve svanire, qualunque sia δy, purchè solamente essa sia una quantità indefinitamente piccola. Ciò richiede che

$$K = 0 \text{ ed } H_1 - H_0 = 0.$$

Infatti se K non è sempre zero, sarà in nostro potere di dare a δy un valore tale da rendere δU positivo o negativo a nostro piacere, e non zero. Supponiamo, per esempio, che il più alto coefficiente differenziale di δy che si trova in $H_1 - H_0$ sia l'n^{mo}. Si ponga $\delta y = \alpha (x - x_1)^{2n} (x - x_0)^{2n}$, in cui α è una funzione di x che è indefinitamente piccola, ed è per ora indeterminata. Allora questo valore di δy fa svanire $H_1 - H_0$, sicchè δU si riduce ad $\int_{x_0}^{x_1} K \delta y \, dx$. Ora si prenda α tale che sia sempre positiva quando K è positiva, e negativa quando K è negativa; allora δU è necessariamente positiva. E se il segno di α si muta, δU è necessariamente negativa. Così se K non è sempre zero, è in nostro potere di prendere in modo δy da rendere δU positiva o negativa a nostro piacere.

Quindi per un valore massimo o minimo di U dobbiamo avere $K = 0$; ed allora $\int_{x_0}^{x_1} K \delta y \, dx$ svanisce, onde ancora $H_1 - H_0$ deve essere $= 0$.

331. Lo studente ha ora acquistato notizia dei tratti essenziali del Calcolo delle Variazioni; questi sono (1) la riduzione di δU alla forma $H_1 - H_0 + \int_{x_0}^{x_1} K \delta y \, dx$, (2) il principio che K deve svanire affinchè U possa essere un massimo o un minimo. Benchè il soggetto sia suscettibile di sviluppo considerevole, per varie estensioni del problema che abbiamo considerato, sempre i due risultati già ottenuti sono i risultati principali.

332. Prendiamo ora ad esaminare più da vicino la natura delle due condizioni

$$K=0 \text{ ed } H_1-H_0=0.$$

L'equazione $K=0$ è ciò che si chiama un'*equazione differenziale*. Supponiamo che $\frac{d^3y}{dx^3}$ sia il più alto coefficiente differenziale che si trovi in V; allora questo si troverà in generale ancora in R, e quindi in $\frac{d^3R}{dx^3}$ si troverà il coefficiente differenziale $\frac{d^6y}{dx^6}$, e questo sarà il più alto coefficiente differenziale che si trova in K, sicchè l'equazione differenziale $K=0$ sarà del sesto ordine. Ed in generale l'ordine dell'equazione differenziale è due volte l'ordine del più alto coefficiente differenziale che si trova in V.

Si fa vedere nei trattati sulle equazioni differenziali che la soluzione di un'equazione differenziale racchiude tante costanti arbitrarie quante ne indica il numero che esprime l'ordine dell'equazione differenziale. Dobbiamo ora mostrare come si debbano determinare le costanti arbitrarie che nascono dalla soluzione dell'equazione $K=0$, sicchè possa ottenersi un risultato definito. La condizione $H_1-H_0=0$ serve a questo scopo. Due casi possono darsi.

(1) Supponiamo che nessuna condizione sia imposta dal problema sui valori di y o dei suoi coefficienti differenziali ai limiti dell'integrazione; allora δy_1, δy_0, δp_1, δp_0, ... sono tutte quantità arbitrarie, cioè, abbiamo in nostro potere il supporre per queste quantità dei valori indefinitamente piccoli come a noi piace; per esempio, possiamo supporre che quante di esse vogliamo siano zero. Poichè δy_1, δy_0, δp_1, δp_0,... sono così tutte arbitrarie, affinchè H_1-H_0 possa certamente svanire, bisogna che svanisca il coefficiente di ciascuna delle quantità arbitrarie. Ciò fornisce per determinare le costanti tante equazioni quante sono le costanti.

(2) Supponiamo che dal problema siano imposte condizioni intorno ai valori di y e dei suoi coefficienti differenziali ai limiti dell'integrazione; allora δy_1, δy_0, δp_1, δp_0, ... non sono *tutte* arbitrarie, poichè alcune di esse si possono espri-

mere in termini delle rimanenti per mezzo delle date condizioni. Siano eliminate da $H_1 - H_0$ tante delle quantità $\delta y_1, \delta y_0, \delta p_1, \delta p_0, \ldots$ per quanto è possibile, ed allora i coefficienti di quelle che rimangono si debbono eguagliare a zero. Le equazioni così ottenute, insieme a quelle che esprimono le condizioni date, formeranno un sistema eguale in numero al numero delle costanti, e quindi serviranno per determinare queste costanti.

333. La principale difficoltà negli esempii consiste nella soluzione dell'equazione differenziale $K=0$, e questa difficoltà è spesso insuperabile.

Mostreremo ora che quando V non contiene esplicitamente la variabile indipendente, si può sempre dare un passo nella soluzione dell'equazione differenziale. Sarà sufficiente per lo scopo pratico di limitarci al caso in cui V non racchiude alcun coefficiente differenziale di ordine superiore al terzo.

Poichè V si suppone non contenere x esplicitamente, abbiamo pel coefficiente differenziale completo di V

$$\frac{dV}{dx} = N\frac{dy}{dx} + P\frac{dp}{dx} + Q\frac{dq}{dx} + R\frac{dr}{dx}.$$

E per supposizione

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Così

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dP}{dx}\frac{dy}{dx} + P\frac{dp}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2}\frac{dy}{dx} + Q\frac{dq}{dx} + \frac{d^3R}{dx^3}\frac{dy}{dx} + R\frac{dr}{dx}.$$

Ora

$$\frac{dP}{dx}\frac{dy}{dx} + P\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}P\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2}\frac{dy}{dx} - Q\frac{dq}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{dQ}{dx}\frac{dy}{dx} - Q\frac{d^2y}{dx^2}\right\},$$

$$\frac{d^3R}{dx^3}\frac{dy}{dx} + R\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^2R}{dx^2}\frac{dy}{dx} - \frac{dR}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3}\right\}.$$

Quindi, con l'integrazione,

$$V=P\frac{dy}{dx}+\frac{dQ}{dx}\frac{dy}{dx}-Q\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2R}{dx^2}\frac{dy}{dx}-\frac{dR}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+R\frac{d^3y}{dx^3}+C\ (2),$$

in cui C è una costante arbitraria. Il più alto coefficiente differenziale che può trovarsi in (2) è $\frac{d^5y}{dx^5}$ che si trova in $\frac{d^2R}{dx^2}$; così (2) è un'equazione differenziale del *quinto* ordine, la quale è un primo integrale dell'equazione (1) che è del *sesto* ordine. Si possono avere casi particolari supponendo che R o Q o P sia zero. Per esempio, il più utile caso è quello in cui V racchiude solamente y e $\frac{dy}{dx}$; sicchè (1) diviene

$$N-\frac{dP}{dx}=0,$$

o (2) diviene

$$V=P\frac{dy}{dx}+C.$$

334. L'equazione differenziale $K=0$ è anche suscettibile di una integrazione quando V non contiene la variabile dipendente. Poichè allora $N=0$, o l'equazione diviene

$$\frac{dP}{dx}-\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^3R}{dx^3}-\ldots=0,$$

e quindi

$$P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\ldots=C.$$

335. Sappiamo che $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx=\int V\frac{dx}{dy}\,dy$, supponendo i limiti dell'integrazione rispetto ad y presi in modo da corrispondere a quelli dell'integrazione rispetto ad x. Ed i coefficienti differenziali di y rispetto ad x si possono esprimere in termini dei coefficienti differenziali di x rispetto ad y. Così in $\int V\frac{dx}{dy}\,dy$ possiamo riguardare y come la variabile indipendente, ed x come la variabile dipendente, e procedere a trovare il valore massimo o minimo dell'integrale in questa

nuova forma. Possiamo esser certi *a priori*, poichè il problema non è realmente mutato con questo cambiamento della variabile indipendente, che otterremo lo stesso risultato come se avessimo lasciato la primitiva variabile indipendente.

Quindi si può vedere che i casi considerati negli Art. 333 e 334 coincidono.

336. Ancora, supponiamo che V contenga solamente p e q. Allora l'equazione differenziale $K=0$ si riduce a

$$-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0;$$

onde, con l'integrazione,

$$P=\frac{dQ}{dx}+C_1.$$

Inoltre

$$\frac{dV}{dx}=P\frac{dp}{dx}+Q\frac{dq}{dx}$$

$$=C_1\frac{dp}{dx}+\frac{dQ}{dx}\frac{dp}{dx}+Q\frac{dq}{dx};$$

onde, con l'integrazione,

$$V=Qq+C_1p+C_2.$$

Quì C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie. In questo caso l'equazione differenziale $K=0$ è del *quarto* ordine, ed il risultato che abbiamo ottenuto è un'equazione differenziale del *secondo* ordine; sicchè abbiamo effettuato due passi nell'integrazione dell'equazione differenziale $K=0$.

337. Procederemo ora a considerare alcuni esempii; siccome abbiamo già detto ci limitiamo interamente alla *prima parte* del procedimento per trovare i valori massimi e minimi; si vegga l'Art. 325.

338. Trovare la linea più breve tra due punti.

Si propone questo esempio semplicemente allo scopo di illustrare le formole, essendo ovvio che il risultato deve essere la linea retta che congiunge i due punti.

Quì $V=\sqrt{(1+p^2)}$ ed $U=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{(1+p^2)}\,dx$.

Così V racchiude solamente p, e l'equazione $K=0$ si riduce a $\frac{dP}{dx}=0$; così P deve essere una costante, cioè, $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$ deve essere una costante. Ciò mostra che p deve essere una costante, e quindi la linea richiesta deve essere una linea retta.

In questo caso $H_1-H_0=\frac{\delta y_1\, p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}-\frac{\delta y_0\, p_0}{\sqrt{(1+p_0^2)}}$.

Se ora i due punti sono punti *fissi*, abbiamo $\delta y_1=0$ e $\delta y_0=0$; così H_1-H_0 svanisce. Allora il valore di p si deve trovare con la condizione che la linea retta passi per i due punti fissi.

Supponiamo però che le *ordinate* dei due punti non siano fisse; le *ascisse* sono fisse poichè x_1 ed x_0 si ritengono invariabili. In questo caso δy_1 e δy_0 sono arbitrarie; e quindi H_1-H_0 non svanirà necessariamente a meno che non svaniscano i coefficienti di δy_1 e δy_0. Ciò richiede che p_1 e p_0 svaniscano, e siccome p è una costante per supposizione questa costante deve essere zero. Così le nostre formole sono d'accordo col fatto ovvio, che quando due linee sono parallele la più breve distanza tra loro si ottiene tirando una linea perpendicolare ad entrambe.

339. Trovare la curva della più celere discesa da un punto dato ad un altro.

Ciò che segue è una più estesa dichiarazione del significato di questo problema. Si supponga un tubo levigato indefinitamente sottile che congiunge i due punti, ed una molecola pesante che scorra lungo questo tubo; si vuol conoscere la forma del tubo affinchè il tempo della discesa sia un minimo. Il problema è conosciuto col nome della *brachistochrona;* esso fu proposto la prima volta da Giovanni Bernoulli nel 1696, e diede origine al Calcolo delle Variazioni.

Supporremo che la curva richiesta giaccia nel piano verticale che contiene i due punti dati. Sia l'asse delle y misurato verticalmente verso basso, e facciamo passare l'asse delle x per il punto dato superiore. La molecola si suppone

partire dalla quiete, ed allora per i principii della meccanica la velocità alla profondità y è $\sqrt{(2gy)}$. Così il tempo della discesa è $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(2gy)}} dx$. Possiamo allora prendere

$$V = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}}.$$

Quì V racchiude solamente y e p; sicchè, per l'Art. 333, dobbiamo avere per un minimo

$$V = Pp + C,$$

cioè,
$$\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}} = \frac{p^2}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}} + C;$$

onde
$$\frac{1}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}} = C.$$

Quindi $y(1+p^2) =$ ad una costante $= 2a$ supponiamo;

onde
$$p^2 = \frac{2a-y}{y};$$

quindi
$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y}{2a-y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{(2ay-y^2)}};$$

quindi $x = a \operatorname{vers}^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{(2ay-y^2)} + b$, in cui b è un'altra costante.

Ciò mostra che la curva richiesta è una cicloide con la sua base orizzontale, il suo vertice in basso, ed una cuspide nel punto superiore. Possiamo supporre l'origine nel punto superiore sicchè $x_0 = 0$, ed allora $b = 0$.

$$\text{Quì} \quad H_1 - H_0 = \left[\frac{p\delta y}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}}\right]_1 - \left[\frac{p\delta y}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}}\right]_0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{(p\delta y)_1 - (p\delta y)_0\}.$$

Siccome supponiamo che tutti e due i punti estremi siano fissi δy_1 e δy_0 svaniscono, e quindi $H_1 - H_0$ svanisce.

La costante a deve essere determinata con la condizione che la cicloide passi per il punto dato più basso.

Supponiamo però che sia data solamente l'ascissa del punto più basso, e non l'ordinata. Allora, come sopra, H_0 svanisce, ed $H_1 = \frac{(p\delta y)_1}{\sqrt{(2a)}}$. Ora δy_1 è arbitraria, affinchè H_1 svanisca, dobbiamo avere $p_1 = 0$; così la tangente della cicloide al punto limite inferiore deve essere orizzontale. Questa condizione deve essere usata in questo caso per determinare la costante a.

340. Possiamo modificare il problema precedente supponendo che la molecola non parta dalla quiete, ma parta con una velocità assegnata. In questo caso supporremo che l'asse delle x non sia condotto pel punto superiore, ma sia preso in modo che la velocità nel punto di partenza sia quella che si acquisterebbe scendendo dall'asse delle x sino al punto fisso superiore. La soluzione rimane come prima, la cuspide della cicloide però non è più nel punto fisso superiore, ma nell'asse delle x.

341. Trovare la curva che congiunge due punti fissi tale che l'area tra la curva, la sua evoluta, ed i raggi di curvatura nelle sue estremità sia un minimo.

Per l'Art. 159 l'espressione che si deve rendere un minimo è

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+p^2)^2}{q}\,dx.$$

Quì V racchiude solamente p e q; e quindi, per l'Art. 336, dobbiamo avere per un minimo

$$V = Qq + C_1 p + C_2,$$

cioè,
$$\frac{(1+p^2)^2}{q} = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}\,q + C_1 p + C_2;$$

onde
$$\frac{(C_1 p + C_2)\,q}{(1+p^2)^2} = 2.$$

Con l'integrazione

$$C_2 \tan^{-1} p + \frac{C_2 p - C_1}{1 + p^2} = 4x + C_3 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Inoltre $$\frac{(C_1 p^2 + C_2 p)\, q}{(1 + p^2)^2} = 2p\,;$$

onde con l'integrazione,

$$C_1 \tan^{-1} p - \frac{C_1 p + C_2}{1 + p^2} = 4y + \text{costante}\,;$$

si aggiunga C_2 ai duo membri di questa equaziono, ed abbiamo

$$C_1 \tan^{-1} p + \frac{p(C_2 p - C_1)}{1 + p^2} = 4y + C_4 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Si elimini $\tan^{-1} p$ da (1) o (2); così

$$\frac{(C_2 p - C_1)^2}{1 + p^2} = 4\,C_2 y - 4\,C_1 x + C_2\,C_4 - C_1\,C_3,$$

onde $$\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{C_2 p - C_1}{2\sqrt{(C_2 y - C_1 x + B)}}\,,$$

in cui B è tale che $4B = C_2\,C_4 - C_1\,C_3$.

Dinoti s la lunghezza dell' arco della curva misurato da un punto fisso; allora, integrando l' ultima equazione, abbiamo

$$s + C = \sqrt{(C_2 y - C_1 x + B)}.$$

Ciò mostra che la curva richiesta è una cicloide; si vegga l'Art. 72.

Dobbiamo ora esaminare l'espressione $H_1 - H_0$; abbiamo

$$H_1 = \delta y_1 \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)_1 + \delta p_1\, Q_1\,,$$

$$H_0 = \delta y_0 \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)_0 + \delta p_0\, Q.$$

Siccome i punti estremi si suppongono fissi, δy_1 e δy_0 svaniscono; così

$$H_1 = \delta p_1\, Q_1\,, \quad H_0 = \delta p_0\, Q_0.$$

Supponiamo s'imponga la condizione che le tangenti della curva richiesta debbano avere direzioni fisse nei punti estremi; allora δp_1 e δp_0 svaniscono, ed $H_1 - H_0$ svanisce. In questo caso la cicloide deve essere determinata dalle condizioni che essa passi per i due punti dati, e le sue tangenti abbiano direzioni fisse in questi punti.

Se, però, non è imposta alcuna condizione sui valori di p ai limiti, dobbiamo avere $Q_1 = 0$ e $Q_0 = 0$, affinchè $H_1 - H_0$ svanisca. Ora $Q = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}$; ed il raggio di curvatura $= \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$. Così questo raggio di curvatura deve svanire nei punti estremi, cioè, la cicloide deve avere cuspidi in quei punti.

342. Trovare la forma di un solido di rotazione, affinchè la resistenza nel muoversi attraverso un fluido nella direzione del suo asse sia un minimo, adottando la teoria ordinaria della resistenza.

Si prenda l'asse delle x per asse di rotazione. Allora adottando la teoria della resistenza che è spiegata nelle opere sull'Idrodinamica, l'espressione che deve essere un minimo si è

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{yp^3}{1+p^2}\, dx.$$

Quì V racchiude solamente y e p, e quindi per l'Art. 333, dobbiamo avere per un minimo

$$V = Pp + C,$$

cioè,
$$\frac{yp^3}{1+p^2} = y\,\frac{3p^3 + p^5}{(1+p^2)^2} + C;$$

onde
$$\frac{2yp^3}{(1+p^2)^2} + C = 0.$$

Questa è un'equazione differenziale per determinare la curva richiesta.

Integrali con limiti soggetti a variazione.

343. Abbiamo ora sufficientemente spiegato ed illustrato il metodo per trovare il valore massimo o minimo di una espressione integrale che racchiude una variabile indipendente, quando i limiti dell'integrazione si suppongono invariabili. Procederemo ad alcune estensioni del problema; ed incominciamo dal considerare la modificazione che nasce supponendo i limiti dell'integrazione variabili.

Supponiamo, per esempio, che si abbiano due curve date in un piano verticale, e che si voglia trovare la curva della più celere discesa da una di queste curve all'altra, la molecola partendo con la velocità acquistata nel cadere da una data linea orizzontale. Quì dobbiamo trovare il punto nel quale la molecola deve lasciare la curva superiore, ed il punto della curva inferiore verso del quale essa deve procedere, come anche il cammino che deve percorrere. Dobbiamo quindi effettuare di più che negli esempii sinora considerati, e spiegheremo ora come si debba procedere.

Sappiamo, da quanto è stato già detto, che la curva deve essere una cicloide con la sua base orizzontale ed una cuspide sulla data linea orizzontale. Infatti supponiamo ogni altra curva condotta da un punto della curva superiore ad un punto della inferiore; questa curva non può essere quella del minimo tempo, poichè sappiamo che, senza cambiare i punti estremi, possiamo trovare una curva di più celere discesa in paragone di questa curva, vale a dire una cicloide con la sua base orizzontale, ed una cuspide sulla data linea orizzontale. Poichè dunque conosciamo che la curva richiesta deve essere una tale cicloide, la parte del problema che dipende dal Calcolo delle Variazioni si deve considerare risoluta; e possiamo investigare, con le ordinarie regole dei massimi e minimi, la posizione della cicloide particolare per la quale il tempo è un minimo. In fatti, prendendo arbitrariamente il punto iniziale ed il punto finale, possiamo trovare l'equazione della cicloide che passa per questi punti; allora il tempo della discesa diverrà una funzione nota delle coordinate del punto iniziale e del punto finale, e possiamo determinare per quali valori di queste coordinate il tempo è un minimo.

344. Abbiamo mostrato nell'articolo precedente che non è assolutamente necessario di fare alcuna modificazione nelle nostre formole per includere il caso in cui i limiti dell'integrazione si suppongono suscettibili di cangiamento; poichè il procedimento già dato, combinato con le regole ordinarie del Calcolo Differenziale, ci abiliterebbe a risolvere ogni esempio. È però conveniente di presentare insieme tutto ciò che è necessario per risolvere tali esempii, e conformemente aggiungeremo ora le richieste modificazioni delle nostre formole primitive. Come sopra, sia

$$U=\int_{x_0}^{x_1} V\,dx.$$

Supponiamo che oltre al cambiamento di y in $y+\delta y$ i limiti x_1 ed x_0 siano cambiati in x_1+dx_1 ed x_0+dx_0 rispettivamente. In conseguenza di questo cambiamento di limiti U riceve l'incremento

$$\int_{x_1}^{x_1+dx_1} V\,dx-\int_{x_0}^{x_0+dx_0} V\,dx,$$

cioè, trascurando i quadrati e le potenze superiori di dx_1 e dx_0, U riceve l'incremento

$$V_1\,dx_1-V_0\,dx_0.$$

Se aggiungiamo questo all'espressione già data per δU, otterremo il cangiamento completo di U in conseguenza della variazione di y, e del cangiamento dei limiti.

345. Se nessuna condizione è imposta sui valori limiti delle coordinate, i termini addizionali testè ottenuti,

$$V_1\,dx_1-V_0\,dx_0,$$

si possono solamente far svanire necessariamente supponendo $V_1=0$ e $V_0=0$. Così introduciamo due nuove equazioni in addizione a quelle che si ottengono da $H_1-H_0=0$; e nello stesso tempo abbiamo due nuove quantità da determinare, cioè, x_0 ed x_1. Però, un caso più comune è quello in cui i valori limiti debbono soddisfare date equazioni. Un tal caso lo abbiamo già indicato nell'Art. 343, in cui si richiede una curva, di cui i punti estremi debbono giacere su curve date.

Considereremo quel limite dell'integrazione pel quale le quantità sono distinte con l'indice 1. Sia

$$Y = y + \delta y,$$

allora se non vi fosse alcun cambiamento del limite, i valori estremi dello variabili sarebbero x_1 ed y_1 prima della variazione ed x_1 ed Y_1 dopo della variazione. Se però x_1 si muta in $x_1 + dx_1$, Y_1 si cangia in

$$\left\{Y + \frac{dY}{dx} dx_1 + \frac{1}{2} \frac{d^2Y}{dx^2} (dx_1)^2 + \ldots\right\}_1,$$

cioè, trascurando i quadrati e lo potenzo superiori di dx_1, Y_1 si cangia in $Y_1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)_1 dx_1$, cioè, trascurando il prodotto $\delta p_1\, dx_1$, in $y_1 + \delta y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1$. Supponendo quindi che la relazione data che deve essoro soddisfatta dai valori estremi sia

$$Y = \psi(X),$$

dobbiamo avere $\qquad y_1 = \psi(x_1),$

ed ancora

$$y_1 + \delta y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1 = \psi(x_1 + dx_1) = \psi(x_1) + \psi'(x_1)\, dx_1$$

al primo ordine. Così

$$\delta y_1 = \left\{\psi'(x) - \frac{dy}{dx}\right\}_1 dx_1.$$

Ciò dà una relaziono tra δy_1 o dx_1, sicchè possiamo eliminare una di esse dal valore completo di δU.

Similmente, si può trovare la relazione tra δy_0 o dx_0.

Nei problemi geometrici $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ è la tangente dell'inclinaziono all'asse dello x della linea che tocca la curva *richiesta* al punto limite; e $\psi'(x_1)$ è la tangente dell'inclinaziono

all'asse delle x della linea che tocca la curva *data* in quel punto.

Si può notare un caso particolare che è alle volte utile. Supponiamo che il cangiamento *completo* di y_1 debba essere zero; questo dà $\delta y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1 = 0$; similmente se il cangiamento *completo* di y_0 deve essere zero, $\delta y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 dx_0 = 0$.

346. Consideriamo ora il caso della brachistochrona, problema che è stato enunciato nell'Art. 343.

Sia la notazione come nell'Art. 339. Allora

$$\delta U = V_1\, dx_1 - V_0\, dx_0 + \left[\frac{p\delta y}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}}\right]_1 - \left[\frac{p\delta y}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}}\right]_0 + \int_{x_0}^{x_1}\left(N - \frac{dP}{dx}\right)\delta y\, dx.$$

Come sopra dall'equazione $N - \frac{dP}{dx} = 0$ deduciamo

$$\sqrt{\{y(1+p^2)\}} = \sqrt{(2a)};$$

così $$\delta U = V_1\, dx_1 - V_0\, dx_0 + \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{(p\delta y)_1 - (p\delta y)_0\}.$$

Supponiamo che l'equazione della curva fissa dalla quale la molecola deve partire sia $Y = \chi(X)$, e che l'equazione della curva fissa alla quale la molecola deve arrivare sia $Y = \psi(X)$. Allora per l'articolo precedente abbiamo

$$\delta y_1 = \{\psi'(x) - p\}_1\, dx_1, \quad \delta y_0 = \{\chi'(x) - p\}_0\, dx_0.$$

Così il valore di δU si può mettere sotto la forma

$$\delta U = \lambda_1\, dx_1 - \lambda_0\, dx_0;$$

in cui $$\lambda_1 = V_1 + \frac{p_1}{\sqrt{(2a)}}\{\psi'(x_1) - p_1\}$$
$$= \frac{\sqrt{(1+p_1^2)}}{\sqrt{y_1}} + \frac{p_1}{\sqrt{(2a)}}\{\psi'(x_1) - p_1\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{1 + p_1\,\psi'(x_1)\}.$$

e similmente

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(2a)}} \{1 + p_0 \chi'(x_0)\}.$$

Poichè dx_1 e dx_0 sono arbitrarii, δU non svanirà necessariamente a meno che $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_0 = 0$. Così

$$1 + p_1 \psi'(x_1) = 0 \text{ ed } 1 + p_0 \chi'(x_0) = 0;$$

e ciò mostra che la cicloide deve tagliare ciascuna delle due curve fisse ad angoli retti.

347. Finora abbiamo tacitamente supposto che la funzione V non racchiuda i valori limiti delle variabili o dei coefficienti differenziali. Supponiamo ora però che V contenga $x_0, x_1, y_0, y_1, p_0, p_1, \ldots$

(1) Supponiamo che x_0 ed x_1 non siano suscettibili di alcun cangiamento. Quando y si muta in $y + \delta y$, oltre la variazione che abbiamo già investigata, V riceverà una variazione addizionale proveniente dal cangiamento in $y_0, y_1, \ldots$ che si trovano esplicitamente in V. Questi termini addizionali in δV sono

$$\frac{dV}{dy_0}\delta y_0 + \frac{dV}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dV}{dp_0}\delta p_0 + \frac{dV}{dp_1}\delta p_1 + \ldots;$$

e per conseguenza si trovano in δU i seguenti termini addizionali,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{\frac{dV}{dy_0}\delta y_0 + \frac{dV}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dV}{dp_0}\delta p_0 + \frac{dV}{dp_1}\delta p_1 + \ldots\right\} dx.$$

Ora δy_0, δy_1, δp_0, $\delta p_1, \ldots$ non sono funzioni della *variabile* x, ma solamente dei valori limiti di x; possiamo quindi portare queste quantità fuori del segno integrale e scrivere i termini addizionali così,

$$\delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0} dx + \delta y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_1} dx + \delta p_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dp_0} dx + \ldots$$

Ora la presenza di questi termini addizionali non modificherà il ragionamento col quale si è mostrato nell'Art. 330 che dobbiamo avere $K = 0$ affinchè U possa essere un massimo o un minimo. Questi termini addizionali debbono es-

sere annessi all'espressione $H_1 - H_0$, ed il tutto si deve far svanire. Poichè la relazione tra x ed y si suppone trovata per mezzo dell'equazione $K = 0$, le espressioni sotto i segni integrali in questi termini addizionali diventano funzioni definite di x, sicchè le integrazioni indicate si possono effettuare, almeno teoreticamente.

(2) Supponiamo che x_0 ed x_1 siano anche mutati, e diventino $x_0 + dx_0$ ed $x_1 + dx_1$ rispettivamente. Allora V riceve l'incremento addizionale

$$\left[\frac{dV}{dx_0}\right] dx_0 + \left[\frac{dV}{dx_1}\right] dx_1,$$

in cui $\left[\frac{dV}{dx_0}\right]$ e $\left[\frac{dV}{dx_1}\right]$ indicano coefficienti differenziali *completi*; vale a dire, dobbiamo rammentarci che x_0 si trova implicitamente in $y_0, p_0, \ldots$, e similmente per x_1.

Così oltre dei termini addizionali che abbiamo già dati δU riceve l'incremento

$$dx_0 \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dx_0}\right] dx + dx_1 \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dx_1}\right] dx,$$

e questa espressione deve essere annessa all'aggregato formato da $H_1 - H_0$ e dai termini addizionali già dati.

348. Come esempio prenderemo un'altra modificazione del problema della brachistochrona. Supponiamo due curve date nello stesso piano verticale, e si voglia trovare la curva della più celere discesa da una di queste all'altra, il movimento incominciando sulla prima curva.

Sia l'asse delle y misurato verticalmente in basso; sia y_0 l'ordinata del punto di partenza, allora quando l'ordinata è y la velocità è $\sqrt{\{2g(y - y_0)\}}$,

Così possiamo prendere

$$U = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{(1 + p^2)}}{\sqrt{(y - y_0)}} dx.$$

Dobbiamo quindi cambiare y in $y-y_0$ nella soluzione dell'Art. 346, ed aggiungere all'espressione ivi data di δU i termini trovati nell'Art. 347.

Quì $V=\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(y-y_0)}}$; sicchè y_0 è il solo valore limite che si trova in V. Dobbiamo quindi aggiungere al primo valore di δU

$$\delta y_0\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dy_0}\,dx+dx_0\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{dV}{dx_0}\right]dx;$$

e

$$\left[\frac{dV}{dx_0}\right]=\frac{dV}{dy_0}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

Quindi per l'Art. 346, dopo di aver posto $K=0$, abbiamo

$$\delta U=\lambda_1 dx_1-\lambda_0 dx_0+\left\{\delta y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 dx_0\right\}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dy_0}\,dx,$$

in cui λ_1 e λ_0 hanno i valori assegnati nell'Art. 346.

Ora nel caso attuale

$$\frac{dV}{dy_0}=-\frac{dV}{dy}=-N=-\frac{dP}{dx};$$

quindi
$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dy_0}\,dx=P_0-P_1=\frac{p_0-p_1}{\sqrt{(2a)}};$$

e
$$\delta y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 dx_0=\chi'(x_0)\,dx_0,\ \text{come nell'Art. 346.}$$

Così
$$\delta U=\lambda_1 dx_1-\lambda_0 dx_0+\frac{\chi'(x_0)}{\sqrt{(2a)}}(p_0-p_1)\,dx_0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{1+p_1\psi'(x_1)\}\,dx_1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{1+p_1\chi'(x_0)\}\,dx_0.$$

Allora eguagliando a zero i coefficienti di dx_1 e dx_0 abbiamo

$$1+p_1\psi'(x_1)=0 \quad \text{ed} \quad 1+p_1\chi'(x_0)=0,$$

sicchè
$$\chi'(x_0)=\psi'(x_1).$$

Così la cicloide taglia la curva fissa inferiore ad angoli retti, e la tangente alla curva fissa superiore nel punto iniziale è parallela alla tangente alla curva fissa inferiore nel punto finale.

Integrali con due variabili dipendenti.

349. Abbiamo finora supposto che V sia una funzione con una sola variabile dipendente; supponiamo ora che V sia una funzione di due variabili dipendenti.

Sia V una funzione di x, y, z, e dei coefficienti differenziali di y e z rispetto ad x; sia

$$U=\int_{x_0}^{x_1} V\,dx,$$

e cerchiamo la variazione nel valore di U quando y e z ricevono variazioni.

Procedendo come nell'Art. 328 otterremo il seguente risultato

$$\delta U = H_1 - H_0 + J_1 - J_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K\delta y + L\delta z)\,dx\,,$$

in cui i simboli hanno i significati seguenti;

δy, come prima, dinota una variazione arbitraria data ad y, cioè, δy è una funzione arbitraria indefinitamente piccola di x;

K, come prima, dinota

$$\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''}-\ldots,$$

in cui $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dy'}$, $\frac{dV}{dy''}$, ... sono coefficienti differenziali parziali, e $\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'}$, $\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''}$, ... sono coefficienti differenziali *completi* rispetto ad x;

δz è una variazione arbitraria data a z, cioè, δz è una funzione arbitraria indefinitamente piccola di x;

L è relativamente a z quello stesso che K relativamente ad y, cioè

$$L=\frac{dV}{dz}-\frac{d}{dx}\frac{dV}{dz'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dz''}-\ldots;$$

$H_1 - H_0$ ha il significato già dato, ed $J_1 - J_0$ è relativamente a z lo stesso che $H_1 - H_0$ relativamente ad y.

350. Procediamo ora a trovare un valore massimo o minimo di U nelle supposizioni dell'articolo precedente.

(1) Se y e z sono indipendenti, affinchè δU possa certamente svanire dobbiamo avere

$$K = 0 \text{ ed } L = 0;$$

ed anche $$H_1 - H_0 + J_1 - J_0 = 0.$$

I valori di y e z in termini di x debbono trovarsi risolvendo le equazioni differenziali $K = 0$, $L = 0$; e le costanti arbitrarie che si trovano in queste soluzioni debbono determinarsi eguagliando a zero i coefficienti delle quantità arbitrarie δy_0, δy_1, $\left(\delta \frac{dy}{dx}\right)_0$, ... δz_0, δz_1, $\left(\delta \frac{dz}{dx}\right)_0$, ... che si trovano in $H_1 - H_0 + J_1 - J_0$.

(2) Supponiamo però che y e z non siano indipendenti, ma che siano legati dalla relazione $\varphi(x, y, z) = 0$, che deve sempre valere. Poichè si suppone che questa relazione regga sempre, abbiamo ancora

$$\varphi(x, y + \delta y, z + \delta z) = 0;$$

e quindi ultimamente

$$\frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\delta z = 0.$$

Così l'integrale $\int_{x_0}^{x_1} (K\delta y + L\,\delta z)\,dx$ diviene

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ K - \frac{L\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dz}} \right\} \delta y\,dx,$$

ed affinchè questo svanisca abbiamo la sola condizione

$$\frac{K}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{L}{\frac{d\varphi}{dz}};$$

e da questa equazione differenziale combinata con $\varphi(x,y,z)=0$, dobbiamo trovare y e z.

Come prima, dobbiamo anche avere

$$H_1 - H_0 + J_1 - J_0 = 0.$$

351. Come esempio prendiamo il seguente problema; determinare una linea di minima lunghezza sopra una data superficie curva tra due punti dati.

Qui abbiamo

$$U=\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}\, dx=\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1+y'^2+z'^2)}\, dx;$$

così $K=-\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}$, $L=-\dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}$;

sia $\varphi(x,y,z)=0$, l'equazione della superficie sulla quale giace la linea. Allora per l'articolo precedente abbiamo, come condizione per un minimo

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}}{\dfrac{d\varphi}{dy}}=\frac{\dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}}{\dfrac{d\varphi}{dz}}.$$

Rappresenti s la lunghezza dell'arco della curva; allora

$$\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}=\frac{dy}{ds},\ \text{e}\ \frac{z'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}=\frac{dz}{ds}.$$

Così l'equazione precedente si può scrivere

$$\frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\dfrac{d\varphi}{dy}}=\frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\dfrac{d\varphi}{dz}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Da questa possiamo congetturare per simmetria che ciascuna di queste frazioni è eguale a

$$\frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\dfrac{d\varphi}{dx}}$$

e ciò possiamo dimostrare; infatti da (1) ciascuna delle frazioni per un noto teorema di algebra è eguale a

$$\frac{\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dz}{ds}\frac{d\varphi}{dz}};$$

e poichè l'equazione $\varphi(x, y, z) = 0$ vale per ogni punto della curva, abbiamo

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{ds}=0;$$

inoltre per un noto teorema

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Quindi una linea di minima lunghezza è determinata dalle equazioni simmetriche

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dx}}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dy}}=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dz}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Si dimostra nelle opere sulla Geometria a tre dimensioni come le equazioni (2) indicano che il piano osculatore in ogni punto della curva contiene la normale della superficie in quel punto.

Massimi e Minimi relativi.

352. Rimane ancora a considerare una classe di problemi, chiamati problemi dei valori massimi e minimi *relativi*. Supponiamo si voglia che un certo integrale U abbia un valore massimo o minimo mentre un altro integrale W, che contiene le stesse variabili, ha un valore costante; per esempio possiamo richiedere una curva che racchiuda un'area massima sotto un dato perimetro. Quì non si richiede che δU svanisca sempre, ma solamente che essa svanisca per quelle relazioni tra le variabili che danno un definito valore co-

stante a W; ciò è in fatti, il richiedere che δU svanisca per tutte quelle relazioni tra le variabili che fanno svanire δW.

Il problema si risolve trovando un valore massimo o minimo di $U + aW$, in cui a dinota una costante; poichè in questa soluzione siamo certi che $\delta U + a\delta W$ svanisce necessariamente, e quindi δU deve svanire sempre che svanisca δW. Nella soluzione si trova la costante a, ed il suo valore deve essere determinato col fare che l'integrale W abbia il valore costante che si suppone dato.

Se si vuole che W sia un massimo o un minimo mentre U rimane costante, procederemo nello stesso modo a trovare il massimo o minimo di $W + bU$, in cui b è una costante; e se supponiamo $b = \frac{1}{a}$, otteniamo l'espressione $\frac{1}{a}(U + aW)$. Così per questo problema si otterrà la stessa soluzione come per quello in cui U deve essere un massimo o minimo mentre W è costante.

Procediamo ora ad alcuni esempii.

353. Si voglia trovare una curva di data lunghezza che congiunge due punti fissi, in modo che l'area limitata dalla curva, l'asse delle x, e le ordinate dei punti fissi sia un massimo.

Qui $\quad U = \int_{x_0}^{x_1} y\, dx, \quad W = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1 + p^2)}\, dx;$

sia $V = y + a\sqrt{(1 + p^2)}$, allora dobbiamo investigare un valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$. Sotto al segno integrale abbiamo solamente y e p; quindi per un massimo o minimo per l'Art. 333, dobbiamo avere

$$V = Pp + C_1,$$

cioè,
$$y + a\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{ap^2}{\sqrt{(1 + p^2)}} + C_1,$$

cioè,
$$y + \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)}} = C_1.$$

Così $$1+p^2=\frac{a^2}{(C_1-y)^2},$$

ondo $$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{1}{p^2}=\frac{(C_1-y)^2}{a^2-(C_1-y)^2};$$

quindi $$x+C_2=\sqrt{\{a^2-(C_1-y)^2\}}.$$

Questo mostra che la curva richiesta è un arco circolaro.

Poichè i punti estremi si suppongono fissi, la parte di δV che dipende dai limiti svanisce.

Le costanti C_1, C_2, a debbono essere determinate facendo che l'arco circolare passi per i dati punti fissi ed abbia tra essi la data lunghezza.

354. Data la lunghezza di una curva, trovare la sua forma in modo che la profondità del centro di gravità sia un massimo.

Si prenda l'asse delle x orizzontale, e l'asse delle y verticale in basso. Dinoti b la lunghezza della curva; allora la profondità del centro di gravità è $\frac{1}{b}\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{(1+p^2)}\,dx$, e la lunghezza è $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{(1+p^2)}\,dx$.

Sia $$V=\frac{1}{b}y\sqrt{(1+p^2)}+a\sqrt{(1+p^2)},$$

allora si cerca un valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$.

Quì per l'Art. 333 dobbiamo avere

$$V=Pp+C_1, \text{ cioè,}$$

$$\frac{y}{b}\sqrt{(1+p^2)}+a\sqrt{(1+p^2)}=\frac{p^2y}{b\sqrt{(1+p^2)}}+\frac{ap^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C_1,$$

onde $$\frac{y+ab}{\sqrt{(1+p^2)}}=bC_1;$$

quindi $$1+p^2=\frac{(y+ab)^2}{b^2C_1^2},$$

e quindi $$\frac{dx}{dy} = \frac{bC_1}{\sqrt{\{(y+ab)^2 - b^2C_1^2\}}};$$

onde $x = A \log [y + B + \sqrt{\{(y+B)^2 - A^2\}}] + C_2$,

in cui C_2 è una nuova costante, ed $A = bC_1$ e $B = ab$.

Questa equazione mostra che la curva richiesta è una catenaria. Se le estremità della curva richiesta si suppongono fisse, i termini dipendenti dai limiti svaniscono, e le costanti A, B, C_2 si debbono determinare facendo che la catenaria passi per i punti fissi ed abbia tra essi una data lunghezza. Supponiamo però che in vece di essere fisse le estremità siano solamente costrette a giacere su curve fisse. Procedendo come nell'Art. 346 otteniamo i seguenti termini ai limiti;

$$V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + P_1 \delta y_1 - P_0 \delta y_0.$$

Consideriamo i termini con l'indice 1; abbiamo

$$V_1 dx_1 + P_1 \delta y_1, \text{ cioè, } \left(\frac{y_1}{b} + a\right) \sqrt{(1+p_1^2)}\, dx_1 + \left(\frac{y_1}{b} + a\right) \frac{p_1 \delta y_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}.$$

Ora supponendo $y = \psi(x)$ l'equazione della curva fissa, abbiamo $\delta y_1 = \{\psi'(x_1) - p_1\}\, dx_1$, sicchè il termine si riduce ad

$$\frac{y_1 + ab}{b\sqrt{(1+p_1^2)}} \{1 + p_1 \psi'(x_1)\}\, dx_1.$$

Affinchè questo svanisca dobbiamo avere $1 + p_1 \psi'(x_1) = 0$, poichè $y_1 + ab$ non può svanire, siccome allora x_1 sarebbe impossibile. Un simile risultato ha luogo per l'altro limite; si vede così che la catenaria deve tagliare le curve fisse ad angoli retti.

355. Data la superficie di un solido di rotazione, trovare la sua natura affinchè il volume contenuto sia un massimo.

Si prenda l'asse delle x per l'asse di rotazione. Allora la superficie è $2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{(1+p^2)}\, dx$, ed il volume è $\pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$.

Sia $V = y^2 + ay\sqrt{(1+p^2)}$; allora dobbiamo trovare un valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$. Qui per l'Art. 333 dobbiamo avere

$$V = Pp + C,$$

cioè, $$y^2 + ay\sqrt{(1+p^2)} = \frac{ayp^2}{\sqrt{(1+p^2)}} + C,$$

onde $$y^2 + \frac{ay}{\sqrt{(1+p^2)}} = C,$$

Questa è l'equazione differenziale della curva che con la rotazione genererebbe la superficie richiesta. Supponendo che le estremità della curva generatrice debbano essere punti fissi, i termini ai limiti svaniscono.

Se ciascuno dei punti fissi è sull'asse di rotazione, il valore $y=0$ deve soddisfare all'equazione della curva; così $C=0$. Allora l'equazione generale si riduce ad

$$y^2 + \frac{ay}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0, \quad \text{onde } y + \frac{a}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0;$$

questa dà un arco circolare per la curva generatrice.

Un'ulteriore discussione di questo problema si troverà nel *Philosophical Magazine* per Luglio e per Agosto 1861.

356. Data la massa di un solido di rotazione di uniforme densità, si cerca la sua forma affinchè la sua attrazione sopra un punto nel suo asse sia un massimo.

Si prenda l'asse delle x per quello di rotazione, e la posizione del punto attratto per origine.

Sia il solido diviso in strati indefinitamente sottili con piani perpendicolari all'asse delle x. Se y rappresenta il raggio di uno strato, x la sua distanza dal punto attratto, κ la sua spessezza e ρ la sua densità, l'attrazione è (per la *Statica*)

$$2\pi\rho\kappa\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right\}.$$

Quindi l'intera attrazione del solido è

$$2\pi\rho\int_{x_0}^{x_1}\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right\}dx;$$

e la massa del solido è

$$\pi\rho\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx.$$

Così sia $V = 1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + ay^2$; allora dobbiamo investigare il valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$.

La condizione $N - \frac{dP}{dx} + \ldots = 0$ si riduce quì ad $N = 0$,

cioè,
$$2ay + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

onde
$$2a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + x = 0.$$

Se supponiamo i limiti x_1 ed x_0 suscettibili di cangiamento abbiamo i termini limiti $V_1 dx_1 - V_0 dx_0$; e per farli svanire dobbiamo avere $V_1 = 0$ e $V_0 = 0$; ciò conduce ad $y_1 = 0$ ed $y_0 = 0$. Così il solido deve essere formato dalla rotazione intorno all'asse delle x dell'intera curva chiusa determinata dall'equazione $2a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + x = 0$; il valore di a si deve trovare per la condizione che la massa, e quindi il volume, è dato.

Integrali doppii.

357. Considereremo ora il problema di trovare il valore massimo o minimo di un *integrale doppio*; ed incominciamo dal trovare la variazione di un integrale doppio.

Sia z una funzione delle variabili dipendenti x ed y per ora incognita; sia V una data funzione di $x, y, z, \frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$; sia $U = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} V dx dy$; l'integrazione si suppone effettuata prima rispetto ad y, ed i limiti y_0 ed y_1 si suppongono funzioni date di x. Si vuol determinare quale funzione z deve essere di x ed y affinchè U possa avere un valore massimo o minimo.

Dinoti δz una funzione arbitraria indefinitamente piccola di x ed y; dinoti δV la variazione prodotta in V quando z riceve la variazione δz, e dinoti δU la variazione in U; allora dobbiamo trovare prima l'espressione di δU.

Dinoti L il coefficiente differenziale parziale di V rispetto a z, M il coefficiente differenziale parziale di V rispetto a $\frac{dz}{dx}$, ed N il coefficiento differenziale parziale di V rispetto a $\frac{dz}{dy}$; allora abbiamo

$$\delta V = L\delta z + M\frac{d\,\delta z}{dx} + N\frac{d\,\delta z}{dy},$$

in cui, come per lo innanzi, ci limitiamo alla prima potenza delle quantità indefinitamente piccole. Quindi

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(L\delta z + M\frac{d\,\delta z}{dx} + N\frac{d\,\delta z}{dy}\right) dx\, dy.$$

Il valore di δV si può scrivere così;

$$\delta V = \left(L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy}\right)\delta z + \frac{d}{dx}(M\delta z) + \frac{d}{dy}(N\delta z),$$

e quindi

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy}\right)\delta z\, dx\, dy$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dx}(M\delta z)\, dx\, dy + \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dy}(N\delta z)\, dx\, dy.$$

I coefficienti differenziali rispetto ad x e ad y che quì sono indicati sono coefficienti differenziali *completi.*

Inoltre $\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dy}(N\delta z)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{x_1}\{(N\delta z)_1 - (N\delta z)_0\}\, dx,$

in cui $(N\delta z)_1$ dinota il valore di $N\delta z$ quando si pone y_1 in vece di y, ed $(N\delta z)_0$ dinota il valore di $N\delta z$ quando si pone y_0 in vece di y.

E per l'Art. 216,

$$\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dx}(M\delta z)\, dy = \frac{d}{dx}\int_{y_0}^{y_1} M\delta z\, dy - (M\delta z)_1\frac{dy_1}{dx} + (M\delta z)_0\frac{dy_0}{dx},$$

in cui $(M\delta z)_1$ dinota il valore di $M\delta z$ quando si pone y_1 in vece di y, ed $(M\delta z)_0$ dinota il valore di $M\delta z$ quando si pone y_0 in vece di y.

Quindi $$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dx}(M\delta z)\,dx\,dy$$

$$=\left(\int_{y_0}^{y_1}M\delta z\,dy\right)_{x=x_1}-\left(\int_{y_0}^{y_1}M\delta z\,dy\right)_{x=x_0}$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}(M\delta z)_1\frac{dy_1}{dx}dx+\int_{x_0}^{x_1}(M\delta z)_0\frac{dy_0}{dx}dx.$$

Quindi $$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(L-\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right)\delta z\,dx\,dy$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left\{(N\delta z)_1-(N\delta z)_0\right\}dx$$

$$+\left(\int_{y_0}^{y_1}M\delta z\,dy\right)_{x=x_1}-\left(\int_{y_0}^{y_1}M\delta z\,dy\right)_{x=x_0}$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}(M\delta z)_1\frac{dy_1}{dx}dx+\int_{x_0}^{x_1}(M\delta z)_0\frac{dy_0}{dx}dx.$$

Se i limiti y_1 ed y_0 sono *costanti*, gli ultimi due termini svaniscono.

358. Nel valore di δU trovato nell'articolo precedente vi è un termine che è un integrale doppio contenente δz sotto i segni integrali, e vi sono diversi integrali semplici che dipendono dai valori limiti di δz. Col metodo già usato nell'Art. 330, ne seguirà che δU non svanirà certamente se non quando svanisce il coefficiente di δz sotto il doppio segno integrale; così per un valore massimo o minimo di U abbiamo come condizione necessaria

$$L-\frac{dN}{dx}-\frac{dN}{dy}=0.$$

Questa è un'equazione differenziale parziale per trovare z in termini di x ed y; e possiamo dire che le funzioni arbitrarie le quali si trovano nella sua soluzione debbono essere determinate in modo che i rimanenti termini in δU svaniscano. Ma la difficoltà d'integrare l'equazione diffe-

renziale parziale in generale impedisce ogni pratico esame di questi termini ai limiti.

359. Come esempio, si voglia determinare la superficie di area minima limitata da una data curva.

Qui per l'Art. 170,

$$U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\,dx\,dy\,;$$

si ponga come al solito

$$\frac{dz}{dx}=p,\ \frac{dz}{dy}=q,\ \frac{d^2z}{dx^2}=r,\ \frac{d^2z}{dx\,dy}=s,\ \frac{d^2z}{dy^2}=t,$$

La condizione per un minimo si riduce a

$$\frac{dM}{dx}+\frac{dN}{dy}=0\,,$$

cioè, a $$\frac{d}{dx}\,\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}+\frac{d}{dy}\,\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}=0\,,$$

cioè, ad

$$r(1+p^2+q^2)-(pr+qs)\,p+t\,(1+p^2+q^2)-(ps+qt)\,q=0,$$

cioè, ad $$(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t=0.$$

Si dimostra nelle opere sulla Geometria a tre dimensioni che questa equazione indica che la superficie cercata è tale che in ogni punto i due raggi principali di curvatura sono eguali in grandezza e di segni contrarii.

Poichè supponiamo che il contorno della superficie proposta sia una curva fissa δz svanisce lungo questo contorno; così i termini relativi ai limiti in δU svaniscono tutti.

Distinzione tra i valori Massimi e Minimi.

360. Faremo ora alcune osservazioni sulla seconda parte della ricerca dei valori massimi e minimi degl'integrali; si vegga l'Art. 325.

Consideriamo il problema di trovare la linea più breve tra due punti dati. Quì

$$V = \sqrt{(1+p^2)}, \qquad U = \int_{x_0}^{x_1} V dx.$$

Supponiamo che y si muti in $y + \delta y$, e per conseguenza p in $p + \delta p$; si ponga $p + \delta p$ in vece di p in V e si sviluppi; così V diviene

$$\sqrt{(1+p^2)} + \frac{p\delta p}{\sqrt{(1+p^2)}} + \frac{(\delta p)^2}{2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \ldots.$$

in cui i termini non espressi sono del *terzo* ordine e degli ordini superiori in δp. Così otteniamo

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \frac{p\,\delta p}{\sqrt{(1+p^2)}} dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{(\delta p)^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} dx - \ldots.$$

Il primo di questi termini è quello che per lo innanzi dinotammo con δU, e la ricerca del valore minimo di U sin dove finora è stata spinta, consiste nel far svanire questo termine. Supponendo adunque che questo termine svanisca, e trascurando i termini del terzo ordine e degli ordini superiori, abbiamo

$$\delta U = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{(\delta p)^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Se $x_1 - x_0$ è positivo, ogni elemento di questo integrale è positivo; così δU è *positiva*, e quindi si è ottenuto un valore *minimo* di U.

361. Ancora, si prenda il caso della brachistochrona, quando i punti estremi sono fissi. Quì

$$V = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}}, \quad U = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}} dx.$$

Si muti y in $y + \delta y$, e p in $p + \delta p$; e si sviluppi il nuovo valore di V. Così V diviene

$$\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{(1+p^2)}\,\delta y}{2y^{\frac{3}{2}}} + \frac{p\,\delta p}{y^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{3(1+p^2)^{\frac{1}{2}}(\delta y)^2}{8y^{\frac{5}{2}}} - \frac{p\,\delta y\,\delta p}{2y^{\frac{3}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\delta p)^2}{2y^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \ldots\ldots;$$

e da questo possiamo ottenere δU.

Ora col procedimento dell'Art. 339 i termini del primo ordine in δU si fanno svanire; quindi trascurando i termini del terzo ordine e degli ordini superiori, abbiamo

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{3(1+p^2)^{\frac{1}{2}}(\delta y)^2}{8y^{\frac{5}{2}}} - \frac{p\,\delta y\,\delta p}{2y^{\frac{3}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\delta p)^2}{2y^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} dx.$$

Dobbiamo ora investigare il segno di questa espressione quando la relazione tra x ed y è quella che è determinata nell'Art. 339; e mostreremo con alcune trasformazioni che δU è positiva.

Poichè $$y^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}},$$

abbiamo $$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{3(2a)^{\frac{1}{2}}(\delta y)^2}{8y^3} - \frac{p\,\delta y\,\delta p}{2y(2a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y(\delta p)^2}{4a(2a)^{\frac{1}{2}}} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2(2a)^{\frac{1}{2}}} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{3a(\delta y)^2}{2y^3} - \frac{p\,\delta y\,\delta p}{y} + \frac{y(\delta p)^2}{2a} \right\} dx.$$

Ora $$\int \frac{p\,\delta y\,\delta p}{y}\,dx = \frac{p(\delta y)^2}{2y} - \frac{1}{2}\int (\delta y)^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{y}\right) dx;$$

e siccome i punti estremi si suppongono fissi δy svanisce ai limiti; quindi

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{p\,\delta y\,\delta p}{y}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (\delta y)^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{y}\right) dx.$$

Ora $$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{y}\right) = \frac{1}{y}\,p\,\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{y^2} = -\frac{a}{y^3} - \frac{p^2}{y^2} = -\frac{3a-y}{y^3}.$$

Quindi $$\int_{x_0}^{x_1} \frac{p\,\delta y\,\delta p}{y}\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (\delta y)^2 \frac{3a-y}{y^3}\,dx;$$

e $$\delta U = \frac{1}{2(2a)^{\frac{1}{2}}} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{(\delta y)^2}{2y^2} + \frac{y(\delta p)^2}{2a} \right\} dx.$$

Così δU è positiva, o quindi si è ottenuto un valore minimo di U.

362. L'articolo precedente mostra come sia possibile cambiare l'espressione del secondo ordine alla quale si riduce δU con le nostre precedenti investigazioni, da una forma in cui il segno è incerto ad una forma in cui il segno è evidente. Una teoria generale rispetto alle convenevoli trasformazioni di tali termini del secondo ordine è stata data da Jacobi; per questo rimandiamo alle opere indicate nella fine del presente capitolo.

Si può osservare che molti dei problemi discussi nel Calcolo delle Variazioni sono tali da poter dedurre con maggiore o minore certezza, dalla natura del problema particolare, che vi possa essere un minimo e non un massimo, o un massimo e non un minimo.

363. Pel problema discusso nell'Art. 359 è facile mostrare che il risultato dà realmente un minimo. Quì

$$V = \sqrt{(1+p^2+q^2)}, \quad U = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{(1+p^2+q^2)}\, dx\, dy$$

Supponiamo z mutato in $z+\delta z$, in conseguenza di che p diviene $p+\delta p$ e q diviene $q+\delta q$. Così V diviene

$$(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{p\delta p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q\delta q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ \frac{(1+q^2)(\delta p)^2}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{pq\,\delta p\,\delta q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1+p^2)(\delta q)^2}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Allora supponendo che si facciano sparire i termini del primo ordine, e trascurando i termini del terzo ordine e degli ordini superiori, abbiamo

$$\delta U = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \frac{(1+q^2)(\delta p)^2 - 2pq\,\delta p\,\delta q + (1+p^2)(\delta q)^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \frac{(\delta p)^2 + (\delta q)^2 + (q\,\delta p - p\,\delta q)^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$$

Così il termine sotto i segni integrali è necessariamente positivo; sicchè si è ottenuto un valore minimo di U.

Condizione di Integrabilità.

364. Nell'Art. 330 abbiamo trovato che $K=0$ è una condizione necessaria per l'esistenza di un valore massimo o minimo dell'integrale ivi considerato. Può accadere però che in alcuni casi la relazione $K=0$ sia soddisfatta *identicamente*; procediamo a dare un esempio di questo caso e ad interpetrarlo.

Supponiamo che si cerchi il valore massimo o minimo di

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} + \frac{xy''}{y}\right)dx.$$

Qui

$$V = \frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} + \frac{xy''}{y},$$

$$N = \frac{dV}{dy} = -\frac{y'}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3} - \frac{xy''}{y^2},$$

$$P = \frac{dV}{dy'} = \frac{1}{y} - \frac{2xy'}{y^2},$$

$$Q = \frac{dV}{dy''} = \frac{x}{y};$$

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = -\frac{y'}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3} - \frac{xy''}{y^2}$$

$$-\left\{-\frac{y'}{y^2} - \frac{2y'}{y^2} - \frac{2xy''}{y^2} + \frac{4xy'^2}{y^3}\right\}$$

$$-\frac{2y'}{y^2} - \frac{xy''}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3}.$$

Riunendo i termini si troverà che

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}$$

svanisce. Così in questo esempio la relazione $K = 0$ è una *identità*, e non possiamo ottenere da essa alcun valore di y.

In questo esempio troveremo che

$$\int V\,dx = \frac{xy'}{y},$$

cioè, l'integrale $\int V dx$ si può ottenere senza assegnare il valore di y in termini di x. Così se vogliamo trovare un valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$, dobbiamo investigare un valore massimo o minimo di $\left(\frac{xy'}{y}\right)_1 - \left(\frac{xy'}{y}\right)_0$. Non si tratta adunque di un massimo o minimo di un'espressione integrale indeterminata della specie finora considerata, ma di un massimo o minimo di un'espressione libera dal segno integrale.

Questa specie di problema di massimo e minimo è considerata in alcuni dei trattati estesi sul Calcolo delle Variazioni; siccome essa non presenta molto interesse rimanderemo lo studente a tali opere.

365. Dimostreremo ora generalmente che la condizione necessaria e sufficiente affinchè V sia integrabile senza assegnare il valore specifico di y in termini di x, si è che $K = 0$ sia identicamente vero. Un'espressione la quale è integrabile senza assegnare il valore specifico della variabile dipendente in termini della variabile indipendente si dice alle volte essere integrabile *per se*, o pure essere *immediatamente integrabile*.

366. Dimostriamo prima che la condizione è necessaria. Supponiamo che V contenga x, y ed i coefficienti differenziali di y rispetto ad x sino a $\frac{d^ny}{dx^n}$ inclusivamente.

Se la funzione V è immediatamente integrabile l'integrale $\int_{x_0}^{x_1} Vdx$ si può esprimere nella forma

$$\varphi\left\{x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1, \ldots\ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_1\right\}$$

$$-\varphi\left\{x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \ldots\ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0\right\},$$

in cui la forma della funzione dinotata da φ rimane immutata qualunque sia il valore di y in termini di x. Ora supponiamo che y riceva una variazione tale che lasci inalterati i valori di y e dei suoi coefficienti differenziali *ai limiti*; allora dal valore di $\int_{x_0}^{x_1} Vdx$ segue che

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} Vdx = 0;$$

così per l'Art. 329

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta y \left\{\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''} - \ldots\right\} dx = 0.$$

Ma questo non può essere vero qualunque sia δy, a meno che

$$\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''} - \ldots = 0,$$

e se questa equazione non è *identicamente* vera essa determina y come una funzione di x. Così se V è immediatamente integrabile la relazione $K = 0$ deve essere vera identicamente.

In secondo luogo dimostreremo viceversa che se questa condizione è soddisfatta V è integrabile immediatamente. Ordinariamente si considera sufficiente il dire che se regge questa condizione la *variazione* di $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$ dipende solamente dai *valori limiti* di x, y ed i coefficienti differenziali di y; e quindi $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$ deve esso stesso dipendere solamente da questi valori limiti, cioè, V deve essere integrabile im-

mediatamente. Nondimeno riprodurremo una dimostrazione più soddisfacente che è stata data di questa proposizione.

Supponiamo $V = \varphi(x, y, y', y'', \ldots)$.

Dinotino u e v due funzioni di x per ora indeterminate; dinoti α una quantità che varieremo indipendentemente da x. Dinoti $\psi(\alpha)$ ciò che diviene V quando si pone $u + \alpha v$ in vece di y, $u' + \alpha v'$ in vece di y', $u'' + \alpha v''$ in vece di y'', e così di seguito; così

$$\psi(\alpha) = \varphi(x, u + \alpha v, u' + \alpha v', u'' + \alpha v'', \ldots).$$

Si differenziino i due membri rispetto ad α, sicchè abbiamo un risultato che possiamo dinotare così,

$$\psi'(\alpha) = \frac{d\varphi}{du} v + \frac{d\varphi}{du'} v' + \frac{d\varphi}{du''} v'' + \ldots.$$

S'integrino i due membri, da $\alpha = 0$ ad $\alpha = 1$; così

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \left\{ \frac{d\varphi}{du} v + \frac{d\varphi}{du'} v' + \frac{d\varphi}{du''} v'' + \ldots \right\} d\alpha;$$

cioè, abbiamo quel che segue identicamente vero,

$$\varphi(x, u + v, u' + v', u'' + v'', \ldots)$$

$$= \varphi(x, u, u', u'', \ldots)$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{d\varphi}{du} v + \frac{d\varphi}{du'} v' + \frac{d\varphi}{du''} v'' + \ldots \right\} d\alpha.$$

S'integrino i due membri rispetto ad x; così

$$\int \varphi(x, u + v, u' + v', u'' + v'', \ldots)\, dx$$

$$= \int \varphi(x, u, u', u'', \ldots)\, dx$$

$$+ \int_0^1 d\alpha \left[\int \left\{ \frac{d\varphi}{du} v + \frac{d\varphi}{du'} v' + \frac{d\varphi}{du''} v'' + \ldots \right\} dx \right],$$

in cui nell'ultimo termine si è cambiato l'ordine delle integrazioni indipendenti.

Con l'integrazione per parti

$$\int \frac{d\varphi}{du'} v'\, dx = v \frac{d\varphi}{du'} - \int v \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du'}\, dx,$$

$$\int \frac{d\varphi}{du''} v'' dx = v' \frac{d\varphi}{du''} - v \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du''} + \int v \frac{d^2}{dx^2} \frac{d\varphi}{du''}\, dx,$$

e così di seguito

Così

$$\int \varphi(x,\ u+v,\ u'+v',\ u''+v'', \ldots)\, dx$$

$$= \int \varphi(x,\ u,\ u',\ u'', \ldots)\, dx$$

$$+ \int_0^1 v \left(\frac{d\varphi}{du'} - \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du''} + \ldots \right) d\alpha$$

$$+ \int_0^1 v' \left(\frac{d\varphi}{du''} - \ldots \right) d\alpha$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int_0^1 d\alpha \left[\int v \left\{ \frac{d\varphi}{du} - \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{d\varphi}{du''} - \ldots \right\} dx \right].$$

Ora per supposizione la relazione $K=0$ è soddisfatta identicamente qualunque sia il valore di y; così essa è soddisfatta ponendo $u+\alpha v$ in vece di y. Quindi

$$\frac{d\varphi}{du} - \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{d\varphi}{du''} - \ldots = 0.$$

Le funzioni u e v sono ora in nostro arbitrio; si ponga $y-u$ in vece di v ed abbiamo

$$\int \varphi(x,\ y,\ y',\ y'',\dots)\,dx$$
$$=\int \varphi(x,\ u,\ u',\ u'',\dots)\,dx$$
$$+(y-u)\int_0^1\left(\frac{d\varphi}{du'}-\frac{d}{dx}\frac{d\varphi}{du''}+\dots\right)d\alpha$$
$$+(y'-u')\int_0^1\left(\frac{d\varphi}{du''}-\dots\right)d\alpha$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Così $\int V\,dx$ è qui attualmente esibito come un'espressione formata da termini, l'uno che racchiude solamente integrazione ordinaria rispetto ad x, e gli altri integrazione ordinaria rispetto ad α. La funzione u è sempre in nostro potere; essa dovrebbe essere scelta in modo che nessuna delle quantità che s'incontrano diventi infinita o indeterminata; può accadere che insieme a questa limitazione si possa porre $u=0$.

367. Sarà ora facile di dare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una funzione sia integrabile *per se* più di una volta.

Abbia V lo stesso significato come sopra.

Abbiamo, qualunque sia V,

$$\int\left\{\int V\,dx\right\}dx = x\int V\,dx - \int x\,V\,dx.$$

Allora affinchè V sia integrabile *per se* due volte, naturalmente deve essere soddisfatta la condizione affinchè essa sia integrabile *per se* una volta; e quindi la sola condizione addizionale si è che xV sia anche integrabile *per se* una volta. Così affinchè V sia integrabile *per se* due volte, le condizioni necessarie e sufficienti sono che siano identicamente vere le seguenti relazioni

$$\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''}-\dots=0\,\dots\dots\,(1),$$

$$\frac{dVx}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dVx}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dVx}{dy''} - \ldots = 0 \ldots\ldots (2).$$

Possiamo modificare la forma di (2). Infatti

$$\frac{dVx}{dy} = x\frac{dV}{dy}, \quad \frac{dVx}{dy'} = x\frac{dV}{dy'}, \quad \frac{dVx}{dy''} = x\frac{dV}{dy''}, \ldots\ldots;$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dVx}{dy'} = x\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'} + \frac{dV}{dy'},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{dVx}{dy''} = x\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''} + 2\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy''},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\frac{dVx}{dy'''} = x\frac{d^3}{dx^3}\frac{dV}{dy'''} + 3\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy'''},$$

....

Si sostituisca in (2) omettendo i termini che sono zero per (1); allora otteniamo

$$\frac{dV}{dy'} - 2\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy''} + 3\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy'''} - \ldots = 0 \ldots\ldots (3).$$

Così (1) e (2) si possono rimpiazzare con (1) e (3).

Per una formola data nell'Art. 54 l'n^{mo} integrale di una qualunque espressione proposta è espresso in termini di $n+1$ integrali semplici. Da questa formola deduciamo che affinchè V sia integrabile *per se* n volte, è necessario e sufficiente che ciascuna delle seguenti espressioni sia integrabile *per se* una volta,

$$V,\ xV,\ x^2V, \ldots\ldots x^nV.$$

Per esempio, affinchè V sia integrabile *per se* tre volte, oltre le condizioni (1) e (2) o (1) e (3), deve essere identicamente vera la seguente,

$$\frac{dVx^2}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dVx^2}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dVx^2}{dy''} - \ldots = 0 \ldots\ldots (4).$$

Possiamo modificare la forma di (4). Infatti

$$\frac{d}{dx}\frac{dVx^2}{dy'} = x^2\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'} + 2x\frac{dV}{dy'},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{dVx^2}{dy''} = x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''} + 4x\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy''} + 2\frac{dV}{dy''},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\frac{dVx^2}{dy'''} = x^2\frac{d^3}{dx^3}\frac{dV}{dy'''} + 6x\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy'''} + 6\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'''},$$

....

Si sostituisca in (4) omettendo i termini che sono zero per (1) e (3); allora otteniamo

$$\frac{dV}{dy''} - \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'''} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''''} - \ldots = 0 \ldots (5).$$

Così si può prendere (5) in vece di (4), in unione con (1) e (2) o (1) e (3).

Aggiunta sulla Variabilità dei Limiti.

368. Nel metodo da noi adottato di trattare i problemi in cui si hanno cangiamenti dei limiti abbiamo seguito l'esempio dato in due opere molto elaborate sull'argomento, quelle di Strauch e Jellett; e decisamente raccomandiamo questo metodo come il migliore. Noi non attribuiamo alcuna *variazione* alla variabile indipendente, ma solamente alla variabile dipendente. Un altro metodo però è stato frequentemente adottato, e dovrebbe essere spiegato affinchè lo studente potesse intendere ogni rinvio ad esso che egli può incontrare nelle sue letture.

In questo metodo si attribuisce una variazione a tutte e due le variabili la dipendente e la indipendente.

Diventi x $x + \delta x$ ed y $y + \delta y$, si vogliono trovare le variazioni di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ...

Dinotiamo la variazione in $\frac{dy}{dx}$ con $\delta\frac{dy}{dx}$; così

$$\delta\frac{dy}{dx}=\frac{d(y+\delta y)}{d(x+\delta x)}-\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{\frac{dy}{dx}+\frac{d\delta y}{dx}}{1+\frac{d\delta x}{dx}}-\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dx}+\frac{d\delta y}{dx}-\frac{dy}{dx}\frac{d\delta x}{dx}-\frac{dy}{dx},$$

trascurando le piccole quantità del secondo ordine.

Così adottando la notazione ordinaria del coefficiente differenziale, abbiamo

$$\delta y'=\frac{d\delta y}{dx}-y'\frac{d\delta x}{dx}$$

$$=\frac{d(\delta y-y'\delta x)}{dx}+y''\delta x,$$

o

$$\delta y'-y''\delta x=\frac{d(\delta y-y'\delta x)}{dx}.$$

In questo risultato si muti y in y'; così

$$\delta y''-y'''\delta x=\frac{d(\delta y'-y''\delta x)}{dx}$$

$$=\frac{d^2(\delta y-y'\delta x)}{dx^2}.$$

Similmente $\delta y'''-y''''\delta x=\dfrac{d^3(\delta y-y'\delta x)}{dx^3}$,

e così di seguito.

Si ponga ω per $\delta y-y'\delta x$; così

$$\delta y'=\frac{d\omega}{dx}+y''\delta x,$$

$$\delta y''=\frac{d^2\omega}{dx^2}+y'''\delta x,$$

$$\delta y'''=\frac{d^3\omega}{dx^3}+y''''\delta x,$$

. . . .

Sia ora V una funzione qualunque di x, y, ed i coefficienti differenziali di y rispetto ad x; e sia $U = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx$. Si voglia esprimere la variazione di U che nasce dalle variazioni δx e δy in x ed y rispettivamente. Dinoti δV il cangiamento prodotto in V; allora

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} (V + \delta V) \frac{d(x + \delta x)}{dx} dx - \int_{x_0}^{x_1} V dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} V \frac{d\delta x}{dx} dx + \int_{x_0}^{x_1} \delta V\, dx,$$

trascurando un termine del secondo ordine.

Ora $$\int V \frac{d\delta x}{dx} dx = V\delta x - \int \left[\frac{dV}{dx}\right] \delta x\, dx,$$

onde $$\int_{x_0}^{x_1} V \frac{d\delta x}{dx} dx = (V\delta x)_1 - (V\delta x)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dx}\right] \delta x\, dx.$$

in cui $\left[\frac{dV}{dx}\right]$ dinota il coefficiente differenziale completo di V rispetto ad x.

Così $$\delta U = (V\delta x)_1 - (V\delta x)_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \delta V - \left[\frac{dV}{dx}\right] \delta x \right\} dx.$$

E $$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dy'}\delta y' + \frac{dV}{dy''}\delta y'' + \dots,$$

$$\left[\frac{dV}{dx}\right] = \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} y' + \frac{dV}{dy'} y'' + \frac{dV}{dy''} y''' + \dots;$$

così

$$\delta V - \left[\frac{dV}{dx}\right] \delta x = \frac{dV}{dy}\omega + \frac{dV}{dy'}\omega' + \frac{dV}{dy''}\omega'' + \dots,$$

e finalmente

$$\delta U = (V\delta x)_1 - (V\delta x)_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dV}{dy}\omega + \frac{dV}{dy'}\omega' + \frac{dV}{dy''}\omega'' + \dots \right) dx.$$

È inutile procedere oltre essendo giunti ad un risultato equivalente a quello nell' Art. 344; qui abbiamo ω in vece del δy che ivi si trova, e δx_1 e δx_0 per dx_1 e dx_0 rispettivamente.

Nelle applicazioni geometriche si osserverà che x ed y diventano con la variazione $x+\delta x$ ed $y+\delta y$ rispettivamente. Così $x_1+\delta x_1$ corrisponderà all' x_1+dx_1 dell' Art. 345, ed $y_1+\delta y_1$ corrisponderà all' $\left(Y+\frac{dY}{dx}dx_1\right)_1$ dell' Art. 345.

369. Per ulteriore informazione sul Calcolo delle Variazioni lo studente può consultare il trattato del Professore Jellett, o la *History of the Progress of the Calculus of the Variations during the Nineteenth Century*, del presente scrittore.

Gli esempii più interessanti in questo soggetto sono quelli che hanno relazione con la Fisica, come il problema della brachistochrona; conformemente includeremo alcune altre applicazioni di questa specie nella seguente scelta di esercizii.

ESEMPII.

1. Una curva di data lunghezza ha le sue estremità su due date linee rette che s' intersegano; determinare la sua forma quando l'area racchiusa tra la curva e la sua corda è un massimo.

2. Determinare una curva piana chiusa di dato perimetro che racchiuda un' area massima.

   (Si vegga *History* ..., pag. 68.)

3. Si vogliono unire due punti fissi con una curva di data lunghezza in modo che l'area limitata dalla curva, le ordinate dei punti fissi, e l'asse delle ascisse sia un massimo, supponendo la lunghezza data maggiore di quella che si trova nella soluzione nell' Art. 353.

   (Si vegga *History* ..., pag. 427).

4. Un piatto rettangolare deve accomodarsi con un coverchio di stagno di data altezza avendo le estremità verticali; determinare la forma affinchè la quantità del materiale adoperato sia la minima possibile.

5. Una montagna ha la forma di una porzione di sfera, e la velocità di un uomo che cammina su di essa varia come l'altezza al di sopra del circolo massimo orizzontale della sfera completa; mostrare che se egli vuol passare da un punto ad un altro nel minor tempo possibile, deve muoversi nel piano verticale che contiene i due punti.

6. Quando una superficie curva può essere divisa da un piano in due porzioni simmetriche l'intersezione del piano con la superficie, quando essa esiste, è in generale una linea di minima lunghezza sulla superficie.
(Si vegga *History* ..., pag. 365.)

7. Trovare il valore minimo di

$$\int \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \operatorname{sen} x + \frac{(y + x - \operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x} \right\} dx.$$

(Si vegga *Philosophical Magazine* per Decembre, 1861.)

8. Si cerca il valore minimo di $\int_0^1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$ sotto le seguenti condizioni; $y=1, \int_0^1 \frac{y}{y_1} dx = -1$.
(Si vegga *History* ..., pag. 432.)

9. Si cerca la variazione di $\int V dx$, in cui V è una funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ e v, essendo $v = \int V' dx$, e V' anche una funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$
(Si vegga *History* ..., pag. 21.)

10. Dinoti s l'integrale $\int_0^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx$, e sia $\varphi(s)$ una funzione qualunque di s; allora si cerca la relazione tra x ed y che rende $\int_0^a \varphi(s)\, dx$ un massimo o un minimo mentre $\int_0^a \sqrt{(1+p^2)}\, dx$ ha un dato valore, a essendo una costante. Per un caso particolare si supponga $\varphi(s) = s$.
(Si vegga *History* ..., pag. 453.)

11. Si cerca la curva in ogni punto della quale

$$\left\{ y + (m - x) \frac{dy}{dx} \right\} \left\{ y + (n - x) \frac{dy}{dx} \right\}$$

è un massimo o un minimo.

(Si vegga *History...*, pag. 1.)

12. Si cerca la curva in ogni punto della quale $y \frac{dy}{dx}$ è un massimo o un minimo, le variazioni di y e $\frac{dy}{dx}$ essendo prese in modo che in ogni pnnto $yx - y^2 \frac{dx}{dy}$ non sia sottoposto ad alcun cangiamento con la variazione.

(Si vegga *History...*, pag. 414.)

13. Applicare l'Art. 350 alla dimostrazione del punto supposto nell'Art. 339, cioè, che la curva richiesta nel problema della brachistochrona giace nel piano verticale che contiene i due punti dati.

14. La forma di un solido omogeneo di rotazione di data area superficiale, e descritto intorno ad un asse di data lunghezza, è tale che il suo momento d'inerzia rispetto all'asse è un massimo; dimostrare che la normale in ogni punto della curva generatrice è tre volte il raggio di curvatura.

15. Un dato volume di una data sostanza deve essere formato in un solido di rotazione, tale che il tempo di una piccola oscillazione intorno ad un asse orizzontale perpendicolare all'asse di figura sia un minimo; determinare la forma del solido.

(Si vegga *History...*, pag. 391.)

16. Un vaso di data capacità in forma di una snperficie di rotazione con due estremità circolari, è riempito di fluido inelastico che gira intorno all'asse del vaso, e si suppone libero dall'azione della gravità. Investigare la forma del vaso affinchè la pressione totale che il fluido esercita sopra di esso sia la minima possibile, le grandezze delle estremità circolari essendo date.

Risultato. La curva generatrice è una catenaria.

17. Trovare l'equazione data dal Calcolo delle Variazioni per la sezione trasversale di un canale rettilineo ed uniforme, quando una delle tre quantità, la superficie, la capacità, e la pressione idrostatica normale, è o un massimo o un minimo, e le altre due sono date, le superficie e le pressioni terminali non essendo prese in considerazione.

Mostrare ancora che quando la superficie è un minimo e la capacità solamente è data, la sezione è circolare; e quando la pressione normale è un minimo la sezione è una catenaria o due linee rette, secondo che è data la superficie o la capacità.

18. Se vi sono due curve con le loro concavità in basso e terminate alle stesse estremità, una molecola che si muove sotto l'azione della gravità impiegherà un tempo maggiore per descrivere la curva superiore che per la curva inferiore, la velocità iniziale essendo supposta la stessa nei due casi.

(Si vegga *History*..., pag. 348.)

AGGIUNTE

AL

CALCOLO INTEGRALE.

AGGIUNTE.

CAPITOLO I.

DELLE CONDIZIONI D'INTEGRABILITÀ PER LE FUNZIONI DIFFERENZIALI DI PIÙ VARIABILI INDIPENDENTI, E DELLA LORO INTEGRAZIONE.

1. La funzione differenziale

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy,$$

in cui la variabile y si suppone legata ad x da una relazione qualunque $y = \varpi(x)$, equivale ad una funzione differenziale di una sola variabile $f(x)\, dx$, dinotando per brevità con $f(x)$ la funzione

$$\varphi[x, \varpi(x)] + \psi[x, \varpi(x)] \cdot \varpi'(x);$$

in modo che se si pone $z = \int f(x)\, dx$, e per conseguenza

$$dz = \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy, \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

si potrà sempre, qualunque siano le funzioni φ, ψ, ϖ, ridurre alle quadrature la determinazione della funzione z.

Al contrario, se le variabili x ed y sono considerate come indipendenti, non si potrà in generale determinare una funzione z di queste due variabili, in modo che l'equazione (1) sia soddisfatta, nè costruire nello spazio una superficie di cui l'ordinata z abbia un differenziale totale espresso dal secondo membro di questa equazione. Infatti, per ciò, bisognerebbe che si avesse

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, y), \quad \frac{dz}{dy} = \psi(x, y),$$

c quindi $$\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}=\frac{d\cdot\psi(x,y)}{dx}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Quando le funzioni φ e ψ verificano l'equazione (2), si dice che l'equazione (1) *soddisfa alla condizione d'integrabilità:* esiste allora una superficie di cui si può rappresentare con (1) l'equazione differenziale, e con $z=F(x,y)$ l'equazione in x, y, z.

2. In questo caso, la determinazione della funzione z si riduce alle quadrature; infatti, poichè si ha

$$\frac{dz}{dx}=\varphi(x,y),$$

bisogna che la funzione z sia della forma

$$z=\int\varphi(x,y)\,dx+\theta(y),$$

$\theta(y)$ dinotando una funzione della sola variabile y che deve essere trattata come una costante nell'integrazione indicata rispetto ad x. Da ciò si ricava, in virtù della regola di differenziazione delle funzioni sotto il segno $\int$:

$$\frac{dz}{dy}=\psi(x,y)=\int\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}dx+\frac{d\cdot\theta(y)}{dy},$$

$$\theta(y)=\int\left[\psi(x,y)-\int\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}dx\right]dy,$$

$$z=\int\varphi(x,y)\,dx+\int\left[\psi(x,y)-\int\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}\,dx\right]dy+cost.$$

Affinchè effettivamente $\theta(y)$ non contenga x, bisogna che si abbia

$$\frac{d\cdot\left[\psi(x,y)-\int\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}dx\right]}{dx}=0,$$

ciò che fa ricadere sulla condizione d'integrabilità espressa dall'equazione (2).

Prendiamo per esempio la funzione

$$dz=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},$$

che soddisfa alla condizione d'integrabilità: si avrà

$$z=\int \frac{y dx}{x^2+y^2}+\theta(y)=\operatorname{arc}\cdot\tan\frac{x}{y}+\theta(y),$$

$$\frac{d\cdot\theta(y)}{dy}=-\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{d\cdot\operatorname{arc}\cdot\tan\frac{x}{y}}{dy}=0,$$

e per conseguenza in questo caso semplicissimo

$$z=\operatorname{arc}\cdot\tan\frac{x}{y}+cost.$$

3. Queste considerazioni si estendono alle funzioni di un numero qualunque di variabili. Così, affinchè esista una funzione u di tre variabili indipendenti x, y, z, suscettibile di soddisfare all'equazione differenziale

$$du=Xdx+Ydy+Zdz \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

in cui X, Y, Z dinotano, per brevità, delle funzioni delle tre variabili x, y, z, bisogna che si abbia

$$\frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx},\quad \frac{dX}{dz}=\frac{dZ}{dx},\quad \frac{dY}{dz}=\frac{dZ}{dy} \;\ldots\ldots (4).$$

Reciprocamente, allorchè queste equazioni di condizione sono soddisfatte, si determina la funzione u con una serie di quadrature. Così si ha

$$u=\int Xdx+\theta(y,z),$$

d'onde si ricava, differenziando sotto il segno $\int$,

$$\frac{du}{dy}=Y=\int\frac{dX}{dy}dx+\frac{d\cdot\theta(y,z)}{dy},$$

e per conseguenza

$$\theta(y,z)=\int\left(Y-\int\frac{dX}{dy}dx\right)dy+\chi(z).$$

Per determinare la funzione $\chi(z)$, si osserverà che

$$\frac{du}{dz}=Z=\int\frac{dX}{dz}dx+\frac{d\cdot\theta(y,z)}{dz};$$

ma, da un'altra parte, in virtù dell'equazione precedente,

$$\frac{d\cdot\theta(y,z)}{dz}=\int\left(\frac{dY}{dz}-\int\frac{d^2X}{dy\,dz}dx\right)dy+\frac{d\cdot\chi(z)}{dz};$$

dunque

$$\frac{d\cdot\chi(z)}{dz}=Z-\int\frac{dX}{dz}dx-\int\left(\frac{dY}{dz}-\int\frac{d^2X}{dy\,dz}dx\right)dy,$$

$$\chi(z)=\int\left[Z-\int\frac{dX}{dz}dx-\int\left(\frac{dY}{dz}-\int\frac{d^2X}{dy\,dz}dx\right)dy\right]dz,$$

e finalmente

$$u=\int X\,dx+\int\left(Y-\int\frac{dX}{dy}dx\right)dy$$

$$+\int\left[Z-\int\frac{dX}{dz}dx-\int\left(\frac{dY}{dz}-\int\frac{d^2X}{dy\,dz}dx\right)dy\right]dz+cost.$$

Affinchè la funzione $\theta(y,z)$ non contenga x, bisogna che si abbia

$$\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=0;$$

questa condizione essendo soddisfatta, $\chi(z)$ non conterrà x, se si ha inoltre

$$\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}=0;$$

e finalmente $\chi(z)$ non conterrà y, purchè si abbia

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=0.$$

Si ritrovano dunque così le tre equazioni (4).

CAPITOLO II.

INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A DUE VARIABILI E DEL PRIMO ORDINE.

4. Il problema dell'integrazione delle equazioni differenziali tra due variabili ha per oggetto di trovare, tra la variabile indipendente e la funzione, un'equazione che soddisfi nel modo più generale all'equazione differenziale proposta, per mezzo dei valori che se ne deducono per i coefficienti differenziali dei diversi ordini. In altri termini, si tratta di trovare l'equazione più generale delle curve che godono in tutt'i loro punti della proprietà espressa dall'equazione differenziale.

Nel Calcolo Differenziale sono stati indicati i legami che sussistono tra un'equazione differenziale di un ordine qualunque, e gl'integrali o le equazioni primitive dei diversi ordini da cui si può concepire che derivi la proposta, per la differenziazione immediata o per la differenziazione combinata con l'eliminazione delle costanti. Poggiandoci su tali principii, esamineremo i casi principali in cui si può trovare l'integrale da cui deriva un'equazione differenziale proposta.

Separazione delle variabili.

5. La formola generale delle equazioni differenziali di primo ordine a due variabili è

$$F(x, y, y') = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Se questa equazione è algebrica e di primo grado rispetto ad y' essa può mettersi sotto la forma

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

L'equazione (2) s'integra sempre, o almeno l'integrazione è ridotta a semplici quadrature, allorchè le variabili vi sono *separate*, vale a dire allorchè questa equazione è messa sotto la forma

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0.$$

L'integrale generale è allora

$$\int \varphi(x)\,dx + \int \psi(y)\,dy = C,$$

C dinotando una costante arbitraria, o

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(y)\,dy = 0,$$

passando agl'integrali definiti, e rappresentando con y_0 il valore di y che corrisponde all'ascissa x_0.

Sia proposta, per esempio, l'equazione

$$ydx - xdy = 0 : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

essa può mettersi sotto la forma

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0;$$

e le variabili trovandosi separate, si avrà integrando $\log y - \log x = C$, d'onde si ricava $y = cx$, dinotando con c il numero di cui il logaritmo è C.

La separazione delle variabili si opera immediatamente, tutte le volte che l'equazione (1) si presenta sotto la forma

$$y' = \varphi(x)\,\psi(y), \text{ d'onde } \frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx.$$

6. Altre volte la separazione non si opera che per mezzo di una trasformazione o di un cambiamento di variabili. Se, per esempio, le funzioni φ, ψ che entrano nell'equazione (2) sono omogenee rispetto alle variabili x, y, si porrà $y = xt$, onde

$$\varphi(x, y) = x^n \varphi_1(t), \quad \psi(x, y) = x^n \psi_1(t).$$

n dinotando la somma degli esponenti di x e di y in ogni termine dell'equazione proposta. In conseguenza questa equazione, dopo di aver tolto il fattore x^n, diverrà

$$\varphi_1(t)\,dx + \psi_1(t)\,(xdt + tdx) = 0,$$

onde
$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi_1(t)\,dt}{\varphi_1(t) + t\,\psi_1(t)} = 0,$$
equazione in cui le variabili sono separate. È così che l'equazione
$$xdy - ydx = \sqrt{(x^2 + y^2)}\,dx$$
diviene
$$\frac{dx}{x} - \frac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)}} = 0;$$
onde, integrando per logaritmi e ripassando in seguito dai logaritmi ai numeri,
$$c = \frac{x}{t + \sqrt{(1 + t^2)}} = \frac{x^2}{y + \sqrt{(x^2 + y^2)}} = -y + \sqrt{(x^2 + y^2)},$$
$$x^2 - 2\,cy - c^2 = 0.$$
In effetto, allorchè si differenzia quest'ultima equazione e si elimina c tra l'equazione primitiva e la sua differenziale immediata, si ricade sull'equazione differenziale proposta.

Accade in alcuni casi che si può, con un cangiamento di variabili o di coordinate, rendere omogenea un'equazione che non è tale. L'esempio più semplice di questa trasformazione ci è fornito dall'equazione
$$(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0.$$
Se si pone $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ (ciò che equivale a cambiare l'origine delle coordinate x, y, senza mutare la direzione degli assi), e se si dispone delle costanti arbitrarie α, β, in modo da soddisfare alle equazioni di condizione
$$a\alpha + b\beta + c = 0,\ a'\alpha + b'\beta + c' = 0,$$
l'equazione proposta diverrà
$$(a\xi + b\eta)\,d\xi + (a'\xi + b'\eta)\,d\eta = 0,$$
e sarà resa omogenea. La trasformazione precedente non sarebbe più possibile, se si avesse $ab' - ba' = 0$, ciò che renderebbe infiniti i valori di α, β. Ma in questo caso l'eliminazione di b' mette l'equazione proposta sotto la forma
$$(ax + by)\left(dx + \frac{a'}{a}\,dy\right) + cdx + c'dy = 0;$$

e se si pone $ax+by=t$, si ottiene un'equazione in t, dt, dx, in cui le variabili si separano senza difficoltà, come in tutte quelle in cui una delle variabili entri solamente col suo differenziale.

Equazione lineare di primo ordine.

7. Una trasformazione semplicissima opera anche la separazione delle variabili nell'equazione

$$y'+y\,\varphi(x)=\psi(x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

che si chiama *equazione lineare di primo ordine*, poichè essa non contiene nè le potenze, nè i prodotti della funzione y e della sua derivata y'. Sia

$$y=\theta t,\ dy=\theta dt+td\theta,$$

θ e t dinotando due funzioni ausiliarie ed incognite di x: la proposta diverrà

$$\theta dt+td\theta+\theta t\cdot\varphi(x)\,dx=\psi(x)\,dx.$$

Si può disporre delle funzioni indeterminate t e θ, in modo da decomporre questa equazione nelle due seguenti

$$\theta dt=\psi(x)\,dx,\quad d\theta+\theta\cdot\varphi(x)\,dx=0.$$

La seconda si presta alla separazione delle variabili e dà

$$\theta=e^{-\int\varphi(x)\,dx}$$

Dopo che si è sostituito questo valore nella prima, viene

$$dt=\psi(x)\,dx\cdot e^{\int\varphi(x)\,dx},\quad t=\int\psi(x)\,dx\cdot e^{\int\varphi(x)\,dx}+C,$$

onde $$y=\left[\int\psi(x)\,dx\cdot e^{\int\varphi(x)\,dx}+C\right]e^{-\int\varphi(x)\,dx}.$$

Esempii. 1.° $$y'+y=-x:$$

viene

$$\int\varphi(x)\,dx=x,\int\psi(x)\,dx\cdot e^x=-\int e^x x\,dx=(1-x)\,e^x+C;$$

$$y=1-x+Ce^{-x}.$$

2.° $$y' + y = -x^3.$$

si ha

$$\int \varphi(x)\,dx = x, \int \psi(x)\,dx \cdot e^x = -e^x [x^3 - 3x^2 + 6(x-1)] + C;$$

$$y = -[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)] + Ce^{-x}.$$

3.° $$y' + \frac{y}{x} = -x:$$

in questo caso gli esponenziali spariscono, poichè si ha

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log x,\ e^{\int \varphi(x)\,dx} = e^{\log x} = x,$$

d'onde si ricava senza difficoltà

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{3}x^2.$$

Si integra ancora l'equazione

$$y^{m-1} y' + y^m \varphi(x) = \psi(x);$$

poichè, per ridurla alla forma dell'equazione (4), basta porre $y^m = u$.

Finalmente, se la proposta fosse

$$y' + y\varphi(x) = y^n \psi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

si ridurrebbe anche alla forma (4), ponendo $y^{n-1} = \frac{1}{u}$. L'equazione (5) è conosciuta sotto il nome di *equazione di Bernoulli.*

Del fattore atto a rendere l'equazione integrabile.

8. Quando il primo membro dell'equazione (2) è un differenziale esatto $d \cdot \varpi(x, y)$, si trova questa funzione ϖ col calcolo indicato nell'Art. 2, e l'integrale si presenta sotto la forma $\varpi(x, y) = c$, c dinotando una costante arbitraria. Reciprocamente, dopo che si sarà ottenuto, con un mezzo qualunque, l'integrale dell'equazione (2), supponiamo che esso si ponga sotto la forma $\varpi(x, y) = c$, risolvendo l'equa-

zione ottenuta rispetto alla costante arbitraria che l'integrazione ha introdotta: la differenziazione darà

$$\frac{d\varpi}{dx}dx + \frac{d\varpi}{dy}dy = 0,$$

equazione di cui il primo membro è necessariamente un differenziale esatto, e che deve sussistere insieme con l'equazione (2). Si avrà dunque

$$\frac{\frac{d\varpi}{dx}}{\varphi(x, y)} = \frac{\frac{d\varpi}{dy}}{\psi(x, y)} = \mu,$$

μ dinotando in generale una funzione di x e di y. Per conseguenza, se si moltiplica il primo membro dell'equazione (2) pel fattore μ, questo primo membro diverrà identico col differenziale totale $d\varpi$, e soddisferà alla condizione d'integrabilità.

Così il primo membro dell'equazione (3) non soddisfa alla condizione d'integrabilità; ma come si è trovato (Art. 5) per l'integrale di quella equazione

$$\frac{y}{x} = c, \text{ onde } \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0,$$

si vede che il fattore $\frac{1}{x^2}$ è quello che rende il primo membro della proposta un differenziale esatto.

Similmente l'integrale dell'equazione

$$[y + \sqrt{(x^2 + y^2)}]\, dx - xdy = 0$$

potendo (Art. 6) essere messo sotto la forma

$$-y + \sqrt{(x^2 + y^2)} = c, \text{ onde } \frac{xdx + [y - \sqrt{(x^2 + y^2)}]\, dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0,$$

ne risulta che il fattore pel quale bisogna moltiplicare la proposta per renderne il primo membro un differenziale esatto è,

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}\, [y + \sqrt{(x^2 + y^2)}]} = -\frac{y - \sqrt{(x^2 + y^2)}}{x\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

9. Si può osservare che, quando si conosce un valore del fattore μ, se ne possono dedurre infiniti altri: infatti, poichè

$$\mu\,[\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy] = d\varpi,$$

si ha $$\mu f(\varpi)\,[\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy] = f(\varpi)\,d\varpi, \quad \ldots (6)$$

$f(\varpi)$ dinotando una funzione qualunque della quantità ϖ di cui si conosce la composizione in x, y. Ora l' espressione $f(\varpi)\,d\varpi$ è essenzialmente un differenziale esatto, e la determinazione della funzione da cui esso deriva risulta da una semplice quadratura: dunque il primo membro dell'equazione (6) è anche un differenziale esatto. In altri termini, il fattore $\mu f(\varpi)$, in cui le funzioni μ, ϖ sono conosciute, ed in cui la funzione f può essere particolarizzata in infiniti modi, gode come il fattore μ della proprietà di rendere il primo membro dell'equazione (2) un differenziale esatto.

Prendiamo per esempio l'equazione (3) e supponiamo semplicemente $f(\varpi) = \varpi$. Si ha in questo caso

$$\mu = \frac{1}{x^2}, \quad \varpi = \frac{y}{x}, \quad \text{onde} \quad \mu f(\varpi) = \frac{y}{x^3}.$$

Quest' ultimo fattore renderà dunque il primo membro dell' equazione proposta un differenziale esatto; ed infatti si ha

$$\frac{y}{x^3}(xdy - ydx) = \frac{x^2 y dy - y^2 x dx}{x^4} = \frac{1}{2}\,d\cdot\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$$

10. Per determinare *a priori* il fattore μ, bisognerebbe soddisfare all'equazione

$$\frac{d\cdot\mu\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\cdot\mu\psi(x,y)}{dx},$$

o $$\varphi\frac{d\mu}{dy} - \psi\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dx}\right) = 0;$$

ma l'integrazione di questa equazione che è alle differenze parziali rispetto alla funzione μ delle due variabili x, y, suppone in generale, come si vedrà in seguito, l'integrazione antecedente dell'equazione (2). Solamente in alcuni casi particolarissimi si può assegnare il fattore μ e per conseguenza ridurre l'integrazione della proposta alle quadrature.

Se, per esempio, il fattore μ non dovesse contenere che la variabile x, l'equazione precedente si ridurrebbe ad

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{\psi}\left(\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dx}\right);$$

e in virtù dell'ipotesi, bisognerebbe che il secondo membro di quest'ultima equazione si riducesse ad una funzione $f(x)$ della sola variabile x. Si avrebbe dunque $\mu=e^{\int f(x)\,dx}$. D'altronde non si restringerà la generalità dell'ipotesi ponendo $\psi=1$, poichè si può sempre ammettere che l'equazione (2) sia stata divisa pel coefficiente di dy; ed allora, bisognerà che il coefficiente $\frac{d\varphi}{dy}$ sia indipendente da y, e che si abbia

$$\varphi(x,y)=yf(x)+F(x);$$

vale a dire che questo caso è quello in cui la proposta si presenta sotto la forma d'un'equazione lineare di primo ordine.

11. Quando l'equazione (2) è omogenea, essa può scriversi

$$x^n\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)dx+x^n\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)dx=0\,;\,\ldots\ldots\ (7)$$

e si è veduto (Art. 6) che essa si cambia in

$$\frac{dx}{x}+\frac{\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)d\cdot\frac{y}{x}}{\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)}=0\,,\,\ldots\ldots\ldots (8)$$

equazione in cui le variabili sono separate, e che è per conseguenza un differenziale esatto. Il fattore pel quale si è dovuto moltiplicare (7) per ottenere (8) è

$$\mu=\frac{1}{x^{n+1}\left[\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)\right]}=\frac{1}{x\varphi(x,y)+y\psi(x,y)}.$$

Equazioni superiori di primo ordine.

12. Se l'equaziono (1) contiene la derivata y' elevata al quadrato o a potenze superiori, se ne ricaveranno con la risoluzione algebrica altre equazioni

$$y' - f_1(x, y) = 0, \quad y' - f_2(x, y) = 0, \text{ etc.},$$

in numero eguale a quello che indica il grado della proposta rispetto ad y'. S'integreranno queste equazioni separatamente, se ciò è possibile: e ciascun integrale, completato da una costante arbitraria, soddisferà alla proposta. Il prodotto di tutti questi integrali soddisferà dunque nel modo più generale all'equazione differenziale proposta; o, in altri termini, questo prodotto ne sarà l'integrale generale. Si potrebbero dinotare le costanti arbitrarie che entrano in ciascun fattore con lettere differenti; ma non si restringerà la generalità dell'integrale dinotando tutte queste costanti arbitrarie con la stessa lettera; poichè, se si attribuiscono a questa lettera unica tutt'i valori numerici possibili, si otterranno evidentemente tutti gl'integrali particolari che ciascun fattore dell'integrale generale è suscettibile di fornire.

Per esempio, la risoluzione dell'equazione

$$y'^2 - ax = 0$$

dà

$$y' - \sqrt{ax} = 0, \quad y' + \sqrt{ax} = 0,$$

equazioni che hanno per integrali

$$c + y - \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} = 0, \quad c_1 + y + \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} = 0.$$

Facendo il prodotto si ha, per l'integrale generalo della proposta,

$$\left(c + y - \frac{2}{3}\sqrt{ax^3}\right)\left(c_1 + y + \frac{2}{3}\sqrt{ax^3}\right) = 0;$$

e non se ne diminuirà la generalità se si pone $c_1 = c$, ciò che dà al prodotto la forma razionale

$$(c + y)^2 - \frac{4}{9} ax^3 = 0.$$

13. Si può in alcuni casi eludere la risoluzione dell'equazione proposta rispetto ad y'. Se, per esempio la variabile y non vi è contenuta, e che essa sia riducibile alla forma $x=f(y')$, si avrà, applicando alla funzione $dy=y'dx$ la regola dell'integrazione per parti,

$$y=y'x-\int x dy'+C=y'f(y')-\int f(y')\,dy'+C.$$

Allorchè la quadratura indicata nel secondo membro di questa equazione potrà effettuarsi algebricamente, non si dovrà fare altro che eliminare y' tra questa equazione e la proposta per ottenere l'integrale completato dalla costante arbitraria C. Si tratterebbe in modo simile l'equazione $y=f(y')$, dopo di aver posto $y'=\frac{1}{x'}$, vale a dire dopo di aver preso y per variabile indipendente.

14. Quando la proposta sarà della forma $y=f(x,y')$, se ne ricaverà

$$y'=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx}.$$

Quest'ultima equazione è di primo ordine rispetto alle variabili x, y': ammettendo che essa cada nella categoria di quelle che si sanno integrare, basterà eliminare y' tra l'integrale ottenuto e la proposta, per avere l'integrale stesso della proposta.

Per esempio, se questa è della forma

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),$$

si avrà

$$y'=\varphi(y')+[\psi'(y')+x\varphi'(y')]\frac{dy'}{dx},\ \text{o}\ \frac{dx}{dy'}-x\frac{\varphi'(y')}{y'-\varphi(y')}=\frac{\psi'(y')}{y'-\varphi(y')}$$

e per conseguenza (Art. 7)

$$x=\left[\int\frac{\psi'(y')\,dy'}{y'-\varphi(y')}\cdot e^{-\int\frac{\varphi'(y')\,dy'}{y'-\varphi(y')}}+C\right]\cdot e^{\int\frac{\varphi'(y')\,dy'}{y'-\varphi(y')}}.$$

Si deve osservare in particolare l'equazione

$$y=xy'+\psi(y'),\ \dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

da cui si ricava con la differenziazione

$$0 = [\psi'(y') + x]\frac{dy'}{dx} \dots\dots\dots\dots (10)$$

Si soddisfa all'equazione (10) ponendo

$$\frac{dy'}{dx} = 0, \text{ onde } y' = c,$$

e la sostituzione di questo valore di y' nell'equazione (9) dà per integrale generale

$$y = cx + \psi(c) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

equazione di una linea retta che si sposta sul piano xy quando si fa variare la costante arbitraria c.

Si soddisfa ancora all'equazione (10) ponendo

$$\psi'(y') + x = 0; \dots\dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

e se si elimina y' tra le equazioni (9) e (12), si ha un'equazione in x, y, che soddisfa all'equazione (10), ma che non ne è l'integrale generale, poichè esso non contiene costante arbitraria, e che non è neanche un integrale particolare, poichè si ricava dall'equazione (12) un valore di y' in x, incompatibile con i valori $y' = c$, ricavati dall'integrale generale. Quest'equazione risultante in x, y è dunque ciò che dicesi un integrale *singolare* della proposta.

CAPITOLO III.

INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI, D'ORDINE QUALUNQUE.

15. Si chiama equazione differenziale *lineare* quella che non racchiude, nè le potenze superiori alla prima, nè i prodotti della funzione e dei suoi coefficienti differenziali dei diversi ordini, e che è per conseguenza della forma

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots + Uy = V, \ldots\ldots (1)$$

$P, Q, \ldots U, V$ dinotando delle funzioni della sola variabile indipendente x.

Supponiamo da principio che il secondo membro di (1) sia nullo, o che si debba integrare l'equazione

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots + Uy = 0. \ldots\ldots (2)$$

La proprietà caratteristica di un'equazione di questa forma consiste in ciò che, se si hanno diversi valori particolari di y in funzione di x che vi soddisfano, valori che dinoteremo con $y_1, y_2, y_3, \ldots$, la somma di questi valori, moltiplicati rispettivamente per costanti arbitrarie C_1, C_2, C_3, etc., o

$$C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \text{etc.},$$

vi soddisfa egualmente. La forma del calcolo sul quale riposa questa proposizione, risulta così evidentemente dalla forma stessa dell'equazione (2), che basta l'indicarlo.

Segue da ciò che se si conoscano n valori particolari e distinti, $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, atti a soddisfare all'equazione (2), questa avrà per integrale generale

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n;$$

poichè questo valore di y soddisfa alla proposta, ed a motivo delle n costanti arbitrarie e distinte che esso racchiude, esso ha tutta la generalità che comporta un tal integrale.

16. Ora, vi è un caso in cui si trovano facilmente n valori particolari di y atti a soddisfare all'equazione (2): si è quello in cui tutt'i coefficienti $P, Q, \ldots U$ si riducono a costanti; infatti se si pone $y=e^{mx}$, si avrà, qualunque sia i, $y^{(i)}=m^i e^{mx}$; in modo che questo valore di y, sostituito nell'equazione (2), darà per risultato

$$e^{mx}(m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}+\ldots+U)=0;$$

ed allora, è chiaro che la funzione $y=e^{mx}$ soddisfa all'equazione (2), purchè il valore assegnato al numero m sia una delle radici dell'equazione numerica

$$m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}+\ldots+U=0\ldots\ldots(3)$$

Dunque, se si dinotano con $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ le n radici di questa equazione, e con $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ delle costanti arbitrarie, l'equazione (2) ha per integrale generale

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}+C_3e^{m_3x}+\ldots+C_ne^{m_nx}\ldots(4)$$

17. Allorchè tutte le radici dell'equazione (3) sono reali e disuguali, si verifica facilmente che le costanti arbitrarie $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$ possono essere sempre numericamente determinate per mezzo dei valori iniziali

$$y_0, y'_0, y''_0, \ldots\ldots y_0^{(n-1)},$$

corrispondenti ad $x=0$. Sia, per esempio, $n=3$, si avrà

$$y_0=C_1+C_2+C_3,$$
$$y'_0=m_1C_1+m_2C_2+m_3C_3,$$
$$y''_0=m_1^2C_1+m_2^2C_2+m_3^2C_3;$$

da cui si ricava

$$C_1=\frac{m_2m_3y_0-(m_2+m_3)y'_0+y''_0}{(m_1-m_2)(m_1-m_3)},$$

$$C_2=\frac{m_1m_3y_0-(m_1+m_3)y'_0+y''_0}{(m_2-m_1)(m_2-m_3)},$$

$$C_3=\frac{m_1m_2y_0-(m_1+m_2)y'_0+y''_0}{(m_3-m_1)(m_3-m_2)}.$$

La simmetria di queste formole indica sufficientemente la legge delle espressioni che si otterrebbero, se si avesse un maggior numero di costanti arbitrarie a determinare, per mezzo dei valori iniziali della funzione e delle sue derivate.

18. Se l'equazione (3) avesse radici immaginarie, le esponenziali divenute immaginarie si aggrupperebbero a due a due e si trasformerebbero in seni e coseni di archi reali. Così, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ dinotando due radici immaginarie coniugate dell'equazione (3), i termini esponenziali che queste radici introducono nell'integrale generale, cioè

$$C_1 e^{x(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + C_2 e^{x(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$$

si cambiano in

$$e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}})$$

$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)\sqrt{-1}\cdot\operatorname{sen}\beta x],$$

e finalmente prendono la forma

$$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\operatorname{sen}\beta x),$$

quando si stabiliscono tra le costanti indeterminate C_1, C_2, M, N le due relazioni

$$C_1 + C_2 = M, \quad (C_1 - C_2)\sqrt{-1} = N.$$

Si può ancora semplificare questa espressione ponendo

$$M = \lambda\cos\varepsilon, \quad N = -\lambda\operatorname{sen}\varepsilon,$$

ciò che dà

$$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\operatorname{sen}\beta x) = \lambda e^{\alpha x}\cos(\beta x + \varepsilon):$$

allora λ ed ε sono le due costanti arbitrarie.

19. Allorchè alcune delle radici dell'equazione (3) diventano eguali tra loro, l'analisi precedente si trova in difetto. Sia, per esempio, $m_1 = m_2$: i termini $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ si confonderanno in un solo $(C_1 + C_2) e^{m_1 x}$, ed il coefficiente $C_1 + C_2$ sarà equivalente ad una sola costante arbitraria, di maniera che l'integrale (4) non avrà più la generalità richiesta. In questo caso, se poniamo

$$y_1 = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x), \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

la sostituzione di questo valore nell'equazione (3) darà

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x)(m_1{}^n + Pm_1{}^{n-1} + Qm_1{}^{n-2} + \ldots + Tm_1 + U)$$

$$+ B_1 e^{m_1 x}[nm_1{}^{n-1} + (n-1)Pm_1{}^{n-2} + (n-2)Qm_1{}^{n-3} + \ldots + T] = 0.$$

Il fattore

$$m_1{}^n + Pm_1{}^{n-1} + Qm_1{}^{n-2} + \ldots + Tm_1 + U$$

svanisce, poichè m_1 è radice dell'equazione (3); ed il polinomio che moltiplica $B_1 e^{m_1 x}$ svanisce ancora, poichè, per ipotesi, m_1 essendo una radice doppia dell'equazione (3) è anche una radice dell'equazione derivata

$$nm^{n-1} + (n-1)Pm^{n-2} + (n-2)Qm^{n-3} + \ldots + T = 0.$$

Dunque, se si continua ad indicare con $m_3, \ldots m_n$ le radici semplici dell'equazione (3), e se si pone

$$y = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x} + \ldots + C_n e^{m_n x},$$

si soddisferà all'equazione (2) di cui si avrà l'integrale generale, poichè le costanti A_1, B_1, $C_3, \ldots C_n$, di numero n, sono irriducibili tra loro.

Si troverebbe similmente che, nel caso di tre radici eguali m_1, m_2, m_3, bisogna rimpiazzare il trinomio

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

con

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_1 x^2)$$

e così di seguito.

La forma che prende l'integrale generale nel caso in cui l'equazione (3) ha radici eguali, risulta ancora dal calcolo seguente.

In luogo di porre immediatamente $m_2 = m_1$, facciamo da principio $m_2 = m_1 + \varepsilon$, ciò che darà

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{m_1 x}\left[C_1 + C_2\left(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}\right)\right],$$

sostituendo ad $e^{\varepsilon x}$ la serie sempre convergente che ne è lo sviluppo. È permesso di mettere questa espressione sotto un'altra forma, cambiando le costanti arbitrarie, e ponendo per ciò $C_1+C_2=A_1$, $C_2\varepsilon=B_1$. In questo modo, l'espressione precedente diviene

$$e^{m_1 x}\left[A_1+B_1x+B_1\left(\frac{\varepsilon x^2}{1\cdot 2}+\frac{\varepsilon^2x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}\right)\right];$$

e se si fa ora $\varepsilon=0$, essa si riduce al secondo membro dell'equazione (5).

Il trinomio (6) essendo stato rimpiazzato da

$$e^{m_1 x}(A_1+B_1x)+C_3e^{m_3 x},$$

nel caso in cui le due radici m_1, m_2 diventano eguali, si potrà fare $m_3=m_1+\varepsilon$, ciò che muta l'espressione precedente in

$$e^{m_1 x}(A_1+B_1x+C_3e^{\varepsilon x})$$

$$=e^{m_1 x}\left[A_1+B_1x+C_3\left(1+\frac{\varepsilon x}{1}+\frac{\varepsilon^2x^2}{1\cdot 2}+\frac{\varepsilon^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}\right)\right].$$

Nulla impedisce di cambiare le costanti ponendo

$$A_1+C_3=D_1,\ B_1+C_3\,\varepsilon=E_1,\ \frac{1}{2}C_3\,\varepsilon^2=F_1;$$

con ciò il secondo membro dell'equazione precedente diviene

$$e^{m_1 x}\left[D_1+E_1\,x+F_1\,x^2+F_1\left(\frac{\varepsilon x^3}{3}+\text{etc.}\right)\right],$$

e si riduce ad

$$e^{m_1 x}(D_1+E_1\,x+F_1\,x^2),$$

allorchè si fa $\varepsilon=0$. Lo stesso metodo si applica evidentemente al caso in cui il numero delle radici eguali diviene qualunque.

20. Se si conoscesse un valore particolare y_1', atto a soddisfare all'equazione (2), si potrebbe abbassare di un'unità l'ordine dell'equazione (2) ed anche l'ordine dell'equazione (1). Per ciò basterebbe fare

$$y=y_1\int z dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

z dinotando una nuova variabile, funzione di x. Osserviamo a tale effetto che, se si dinotano con u, v delle funzioni qualunque di una stessa variabile indipendente, si ha:

$$d \cdot uv = udv + vdu,$$

$$d^2 \cdot uv = ud^2v + 2dudv + vd^2u,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^n \cdot uv = ud^nv + \frac{n}{1} \cdot dud^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot d^2ud^{n-2}v + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1} \cdot dvd^{n-1}u + d^nu.$$

In conseguenza di queste formole, la sostituzione del valore di y nell'equazione (1) dà

$$y_1 z^{(n-1)} + (ny'_1 + Py_1) z^{(n-2)}$$

$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_1'' + (n-1) Py_1' + Qy_1\right] z^{(n-3)} + \ldots$$

$$\ldots + (y_1^{(n)} + Py_1^{(n-1)} + Qy_1^{(n-2)} + \ldots + Uy_1) \int z dx = V.$$

Ora, il coefficiente di $\int z dx$ in questa equazione è nullo per ipotesi, poichè y_1 è un integrale particolare dell'equazione (2). Se si divide questa equazione per y_1 che è una funzione conosciuta di x, essa sarà ridotta alla forma

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = \frac{V}{y_1}, \ldots (8)$$

P_1, Q_1, .. T_1, dinotando come P, Q, ... T, delle funzioni conosciute di x, e l'ordine dell'equazione (1) si troverà abbassato di un'unità.

Nel caso in cui si tratta d'integrare, non già l'equazione (1), ma l'equazione (2), l'ultima equazione ottenuta è rimpiazzata da

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = 0 \ldots\ldots (9).$$

In questa ipotesi, se si conoscesse un secondo valore particolare y_2, atto a verificare l'equazione (2), uno dei valori di z ricavati dall'equazione (9) dovrebbe verificare l'equazione (7), dopo di avervi rimpiazzato y con y_2. Si avrebbe dunque, dinotando con z_1 questo valore particolare di z,

$$y_2 = y_1 \int z_1 \, dx, \text{ o } z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}.$$

Dunque, se si conoscono due integrali particolari dell'equazione (2), si conoscerà con ciò un integrale particolare dell'equazione (9); ed in conseguenza l'ordine dell'equazione (9) si abbasserà di un'unità per mezzo della trasformazione $z = z_1 \int u dx$. Siccome questo ragionamento può essere continuato di mano in mano, ne segue che se si conoscono m integrali particolari dell'equazione (2), l'integrazione generale di questa equazione, ed anche quella dell'equazione (1), saranno ridotte a dipendere dall'integrazione di un'equazione differenziale dell'ordine $n - m$; di maniera che questa essendo integrata, si avrà l'integrale generale dell'equazione (1) con semplici quadrature. Bel teorema dovuto a Lagrange.

21. Quando i coefficienti $P, Q, \dots U$ dell'equazione (1) sono numeri costanti, il solo ultimo termine V essendo funzione di x, si conoscono n integrali particolari dell'equazione (2),

$$y_1 = e^{m_1 x}, \; y_2 = e^{m_2 x}, \dots y_n = e^{m_n x}:$$

$m_1, m_2, \dots m_n$ dinotando sempre le radici dell'equazione (3). L'integrazione generale dell'equazione (1) si trova dunque ridotta alle quadrature.

Sia, per esempio, l'equazione lineare di secondo ordine

$$y'' + Py' + Qy = V,$$

in cui P, Q dinotano dei numeri costanti: m_1, m_2 sono le radici dell'equazione numerica

$$m^2 + Pm + Q = 0, \dots\dots\dots\dots (10)$$

e si ha $$y_1 = e^{m_1 x},\ y_2 = e^{m_2 x}.$$

Poniamo $$y = y_1 \int z dx = e^{m_1 x} \int z dx:$$

la trasformata in z sarà

$$z' + (2m_1 + P) z = Ve^{-m_1 x}, \text{ o } z' - (m_2 - m_1) z = Ve^{-m_1 x},$$

per essere $P = -(m_1 + m_2)$. Facciamo inoltre

$$z = z_1 \int u dx = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} \int u dx = (m_2 - m_1)\, e^{(m_2 - m_1)x} \int u dx:$$

la trasformata in u darà

$$u = \frac{Ve^{-m_2 x}}{m_2 - m_1}.$$

Da ciò si ricava

$$z = e^{(m_2 - m_1)x} \int V e^{-m_2 x} dx,$$

$$y = e^{m_1 x} \int dx\, [e^{(m_2 - m_1)x} \int Ve^{-m_2 x} dx],$$

ovvero, integrando per parti,

$$y = \frac{e^{m_2 x} \int Ve^{-m_2 x} dx - e^{m_1 x} \int Ve^{-m_1 x} dx}{m_2 - m_1} \dots\dots (11)$$

I due integrali indefiniti si suppongono racchiudere ciascuno una costante arbitraria.

Allorchè m_1, m_2 sono due radici immaginarie coniugate, della forma $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, l'espressione precedente si cambia in

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} (\operatorname{sen} \beta x \int Ve^{-\alpha x} \cos \beta x \cdot dx - \cos \beta x \int Ve^{-\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \cdot dx).$$

Infine, se si avesse $m_2 = m_1$, il secondo membro dell'equazione (11) si presenterebbe sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma, prendendo le derivate del numeratore e del denominatore rispetto al

parametro m_2, e ponendo in seguito $m_2 = m_1$, si troverebbe per questo caso

$$y = e^{m_1 x} \left(x \int V e^{-m_1 x}\,dx - \int V e^{-m_1 x} x\,dx\right).$$

22. Non lasceremo questo soggetto senza far conoscere il metodo impiegato comunemente per far dipendere l'integrazione dell'equazione (1) da quella dell'equazione (2).

Supponiamo che si conoscano n integrali particolari dell'equazione (2), in modo che si abbia per l'integrale generale di questa equazione

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots + C_n y_n : \ldots . (12)$$

questo valore di y si può prendere ancora per l'integrale generale dell'equazione (1), purchè si considerino i fattori $C_1, C_2, \ldots C_n$, non più come costanti, ma come delle funzioni di x, da determinarsi convenevolmente.

Infatti, in questa ipotesi si ha

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \ldots + C_n y_n'$$
$$+ y_1 C_1' + y_2 C_2' + y_3 C_3' + \ldots + y_n C_n'$$

(C_i' dinotando la derivata di C_i rispetto ad x), e se si assoggettano le funzioni C_i a verificare l'equazione

$$y_1 C_1' + y_2 C_2' + y_3 C_3' + \ldots + y_n C_n' = 0,$$

resta $$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \ldots + C_n y_n',$$

come nel caso in cui i fattori C_i sono costanti.

Da questa ultima equazione si ricava

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'' + \ldots + C_n y_n'',$$
$$+ y_1' C_1' + y_2' C_2' + y_3' C_3' + \ldots + y_n' C_n',$$

o semplicemente

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'' + \ldots + C_n y_n'',$$

quando si assoggettano le derivate C_i' a verificare l'equazione di condizione

$$y_1'C_1' + y_2'C_2' + y_3'C_3' + \ldots + y_n'C_n' = 0.$$

Continuando in tal modo, si trova che il valore di y dato dall'equazione (12), e che per ipotesi verifica l'equazione (2), soddisfa anche all'equazione (1), purchè le derivate C_i' verifichino il sistema delle equazioni di condizione

$$y_1C_1' + y_2C_2' + y_3C_3' + \ldots + y_nC_n' = 0,$$

$$y_1'C_1' + y_2'C_2' + y_3'C_3' + \ldots + y_n'C_n' = 0,$$

$$y_1''C_1' + y_2''C_2' + y_3''C_3' + \ldots + y_n''C_n' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + y_3^{(n-1)}C_3' + \ldots + y_n^{(n-1)}C_n' = V.$$

Ora, da queste equazioni in numero n si ricava il valore di ciascun'incognita C_i' eguale ad una certa funzione $\varpi_i(x)$, e per conseguenza una semplice quadratura dà

$$C_i = \int \varpi_i(x)\, dx + c_i,$$

c_i dinotando una nuova costante arbitraria. Si ottiene dunque in questo modo, con semplici quadrature, l'integrale generale dell'equazione (1), con le n costanti arbitrarie che esso comporta.

CAPITOLO IV.

INTEGRALI SINGOLARI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI PRIMO ORDINE.

23. Sia

$$f(x, y, y') = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

un'equazione differenziale di 1° ordine, di cui si ha l'integrale completo sotto la forma

$$F(x, y, a) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

a dinotando la costante arbitraria introdotta dall' integrazione. Quando si differenzia successivamente l'equazione (2) considerandovi la quantità a, prima come una costante, e poi come una funzione delle variabili x, y, si ha

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{da} \left(\frac{da}{dx} + y' \frac{da}{dy}\right) = 0,$$

onde

$$y' = - \frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}$$

$$y' = - \frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} - \frac{dF}{da} \left(\frac{da}{dx} + y' \frac{da}{dy}\right) : \frac{dF}{dy};$$

e questi due valori di y' coincideranno, se si determina a in funzione di x, y, in modo da verificare l' una o l' altra delle due equazioni

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Segue da ciò che l'equazione

$$\varphi(x, y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

risultante dall'eliminazione di a tra l'integrale (2) e l'una delle equazioni (3) soddisfa ancora all'equazione (1) di cui essa è un integrale *singolare;* a meno che l'equazione (4) non si confonda con un integrale particolare, il valore di a ricavato da una delle equazioni (3) riducendosi ad una costante, o ad una funzione di x, y che essa stessa si riduce ad una costante in virtù dell'equazione (4). Si sa inoltre, che l'equazione (4) appartiene ad una linea che tocca o inviluppa tutte le linee di cui il sistema è rappresentato dall'integrale generale (2), finchè il parametro a conserva la sua indeterminazione.

Risulta dalle cose dette una regola semplicissima per trovare gl'integrali singolari di un'equazione differenziale di primo ordine, di cui si è antecedentemente determinato l'integrale generale: ma si può dire di più che questi integrali singolari possono essere assegnati, senza che si abbia bisogno di conoscere l'integrale generale, ed anche quando vi sarebbe impossibilità di assegnare all'integrale generale un'espressione analitica sotto forma finita, ciò che è il caso più ordinario.

Effettivamente la linea inviluppo che rappresenta l'integrale singolare, non può esistere se non quando vi è intersezione tra le linee che rappresentano gl'integrali particolari, e che corrispondono a valori distinti della costante arbitraria. Dunque, per i valori di x, y relativi a questi punti d'intersezione, il valore di y' in x, y, ricavato dall'equazione (1), deve essere multiplo; vale a dire, questa equazione, supposta algebrica, deve essere di secondo grado o di un grado superiore rispetto ad y', dopo che si saranno fatti sparire i radicali.

Segue da ciò che in generale tutt'i punti corrispondenti a valori di x, y che non rendono y' immaginario, sono punti d'intersezione di due linee almeno, prese tra quelle che rappresentano gl'integrali particolari.

Ma, per i punti situati sull'inviluppo o sulla linea di contatto di tutte queste curve, non vi è più intersezione, o almeno un'intersezione sparisce: dunque bisogna che l'equazione (1), in cui si considera y' come l'incognita, acquisti allora radici multiple, ciò che conduce alla condizione

$$\frac{df}{dy'} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Dunque reciprocamente l'equazione (5) determina la relazione tra x ed y che caratterizza la linea di contatto o l'integrale singolare.

Prendiamo per esempio l'equazione differenziale

$$y'^2(x^2-r^2)-2xyy'=x^2, \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

che ha per integrale generale

$$x^2-2ay=r^2+a^2, \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

a dinotando la costante arbitraria.

La prima delle equazioni (3) dà in questo caso $a=-y$, e questo valore di a, sostituito nell'equazione (7), dà per integrale singolare $x^2+y^2-r^2=0$. Ora, senza che si abbia bisogno di conoscere l'integrale (7), l'equazione (5) fornisce la relazione

$$y'=-\frac{xy}{r^2-x^2};$$

e questo valore di y', sostituito nell'equazione (6), riproduce l'integrale singolare dedotto in primo luogo dall'integrale generale.

24. La riuscita di questo metodo tiene a ciò che l'equazione differenziale è preparata in modo da non contenere radicali. Se al contrario l'equazione fosse risoluta rispetto ad y', o messa sotto la forma $y'=\theta(x,y)$, il metodo si troverebbe in difetto. Ma bisogna osservare che quando si differenzia l'equazione (1) rispetto ad y e rispetto ad x, considerando y' come una funzione delle variabili x, y, determinata implicitamente da questa equazione, si ha

$$\frac{dy'}{dy}=-\frac{df}{dy}:\frac{df}{dy'},\quad \frac{dy'}{dx}=-\frac{df}{dx}:\frac{df}{dy'}.$$

Ora, il valore di y in x che appartiene all'integrale singolare, fa svanire $\frac{df}{dy'}$: dunque lo stesso valore deve rendere infiniti i coefficienti differenziali $\frac{dy'}{dy}$, $\frac{dy'}{dx}$, dopo che vi si è sostituito per y' il suo valore in x, y, ricavato dall'equazione (1). Per conseguenza, se si può dedurre dalle equazioni

$$\frac{d\theta(x,y)}{dy}=\infty,\quad \frac{d\theta(x,y)}{dx}=\infty.$$

un valore di y in x che verifichi anche l'equazione (1), questo valore riprodurrà l'integrale singolare.

Per esempio, l'equazione (6), risoluta rispetto ad y', dà

$$\theta(x, y) = \frac{x}{x^2 - r^2}\left[y \pm \sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)}\right],$$

onde $$\frac{d\theta(x, y)}{dy} = \frac{x}{x^2 - r^2} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)} \pm y}{\sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)}},$$

$$\frac{d\theta(x, y)}{dx} = \frac{-(x^2 + r^2)y\sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)} \mp r^2(x^2 + y^2 - r^2) \mp x^2y^2}{(x^2 - r^2)^2\sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)}};$$

e questi valori diventano infiniti quando si pone $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, ciò che soddisfa all'equazione (6) di cui si ottiene così l'integrale singolare.

25. Quando si differenzia l'equazione (1), considerandovi y, y' come funzioni implicite di x, viene

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dy'}y'' = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

onde $$y'' = -\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y'\right) : \frac{df}{dy'} \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Ma il valore di y in x che dà l'integrale singolare, annulla $\frac{df}{dy'}$, e riduce l'equazione (8) a

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0;$$

dunque questo stesso valore di y in x mette sotto la forma $\frac{0}{0}$ il valore

$$y'' = \frac{\varphi(x, y, y')}{\psi(x, y, y')}$$

dato dall'equazione (9); il che fornisce ancora un altro procedimento per trovare l'integrale singolare. In effetto, si porrà

$$\varphi(x, y, y') = 0, \ \psi(x, y, y') = 0;$$

indi si eliminerà successivamente y' tra ciascuna di queste due equazioni e la proposta (1). Se le due equazioni risultanti hanno un fattore comune, questo fattore darà l'integrale singolare cercato.

Operando in questo modo sull'equazione (6), si trova

$$y'' = \frac{y\,y' + x}{y'(x^2 - r^2) - xy}.$$

L'eliminazione di y' tra la proposta e ciascuna delle equazioni

$$y\,y' + x = 0,\quad y'(x^2 - r^2) - xy = 0,$$

dà per risultanti in cui il fattore comune è in evidenza,

$$\frac{x^2}{y^2}(x^2 + y^2 - r^2) = 0,\quad \frac{x^2}{x^2 - r^2}(x^2 + y^2 - r^2) = 0.$$

26. Abbiamo veduto (Art. 14) che l'equazione di primo ordine

$$y = xy' + \psi(y')$$

essendo sottoposta ad una seconda differenziazione, dà l'equazione di secondo ordine

$$[x + \psi'(y')]\,y'' = 0,$$

che si decompone immediatamente in due fattori di cui l'uno fornisce l'integrale generale, e l'altro l'integrale singolare della proposta. Bisogna generalizzare questo fatto di calcolo e mostrare che quando un'equazione di primo ordine ammette un'integrale singolare, si può sempre mettere l'equazione sotto una forma tale che la sua derivata si decomponga in due fattori, di cui l'uno dà l'integrale singolare, per mezzo dell'eliminazione di y' con la proposta, mentre l'altro, che è annullato dal valore di y in x ricavato dall'integrale generale, non lo è più dal valore ricavato dall'integrale singolare.

L'equazione

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,y' = 0, \dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

essendo risoluta rispetto ad a darà

$$a = \varpi(x, y, y'); \dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

e se si sostituisce questo valore di a nell'equazione (2), l'equazione risultante

$$F(x, y, \varpi) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

sarà equivalente all'equazione (1), in questo senso che, se esse non si confondono, si passerà dall'una all'altra moltiplicando il primo membro della prima per una funzione convenevolmente scelta delle variabili x, y, y'. Ora, differenziando l'equazione (12), si ha

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{d\varpi}\left(\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varpi}{dy} y' + \frac{d\varpi}{dy'} y''\right) = 0;$$

e di più la somma dei due primi termini è identicamente nulla, poichè si è sostituito per a, nella funzione F, il suo valore ricavato dall'equazione (10): dunque la derivata dell'equazione (12) si riduce a

$$\frac{dF}{d\varpi}\left(\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varpi}{dy} y' + \frac{d\varpi}{dy'} y''\right) = 0,$$

e si decompone in due fattori

$$\frac{dF}{d\varpi} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varpi}{dy} y' + \frac{d\varpi}{dy'} y'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

L'equazione (14), che è di secondo ordine, ha evidentemente per integrale di primo ordine l'equazione (12); e l'eliminazione di y' tra le equazioni (11) e (12) avrà luogo se si elimina ϖ tra le stesse equazioni, o se si rimpiazza ϖ con a nell'equazione (12), vale a dire che questa eliminazione darà l'integrale generale della proposta.

Similmente l'eliminazione di y' tra le equazioni (11) e (13) si opererà con l'eliminazione di ϖ tra le stesse equazioni, o con l'eliminazione di a tra l'equazione (2) e la sua derivata rispetto ad a: essa condurrà dunque all'integrale singolare della proposta, o al meno all'equazione di una linea di contatto delle curve che ne rappresentano gl'integrali particolari.

Si vede anche da questo calcolo che il valore di y in x ricavato dall'integrale singolare, il quale dà per y' un va-

lore che verifica la proposta, non dà per y'' un valore atto a verificare l'equazione (14), nè per conseguenza per y''', y'''' etc. dei valori atti a verificare le derivate successive della proposta.

Applichiamo quest'analisi all'equazione (7): si avrà

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 2x - 2ay',$$

onde $$\varpi = \frac{x}{y'}, \; F(x, y, \varpi) = x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - r^2 = 0, \ldots (15)$$

equazione che si confonderebbe con (6) togliendo il denominatore y'^2. La differenziazione dell'equazione (15) dà

$$-\frac{y}{y'} + \frac{xyy''}{y'^2} - \frac{x}{y'^2} + \frac{x^2y''}{y'^3} = 0,$$

o sia $$\left(y + \frac{x}{y'}\right)\left(\frac{1}{y'} - \frac{xy''}{y'^2}\right) = 0.$$

Il valore di y' ricavato dall'equazione $y + \frac{x}{y'} = 0$, e sostituito nella proposta, dà l'integrale singolare $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. L'altro fattore è la derivata rispetto ad x della funzione $\frac{x}{y'}$: l'integraziono dà dunque $\frac{x}{y'} = a$; e questo valore di y', sostituito nella proposta, riproduce l'equazione (7).

CAPITOLO V.

INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A PIÙ VARIABILI INDIPENDENTI.

Integrazione delle equazioni fra tre variabili ai differenziali totali, e di 1° grado.

27. Se si ha, tra le variabili indipendenti x, y, e la funzione z che ne dipende, un'equazione della forma

$$dz = \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy,$$

l'integrazione di questa equazione si riduce alle quadrature (Art. 1), purchè le funzioni φ, ψ soddisfino alla condizione d'integrabilità

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}.$$

Se le funzioni φ, ψ contenessero la variabile z, o se si avesse tra le variabili x, y, z ed i loro differenziali totali, l'equazione

$$X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

X, Y, Z dinotando delle funzioni di x, y, z, si ridurrebbe anche alle quadrature l'integrazione di questa equazione (Art. 3) purchè le funzioni X, Y, Z soddisfino alle condizioni d'integrabilità

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy};$$

e l'integrale avrebbe la forma $F(x, y, z) = cost.$ F dinotando la funzione di cui il primo membro dell'equazione (1) è il differenziale esatto.

In tutt'i casi, ammettendo che esista una funzione z delle due variabili indipendenti x, y, atta a soddisfare all'equazione (1), e da cui si possa ricavare il valore di dz sotto la forma

$$dz = pdx + qdy,$$

bisogna che si abbia

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ma, in virtù dell'equazione (1),

$$p = -\frac{X}{Z}, \quad q = -\frac{Y}{Z};$$

onde

$$\frac{dp}{dy} = -\left\{\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right\} = -\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dz}\cdot\frac{Y}{Z}.$$

$$\frac{dq}{dx} = -\left\{\frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right\} = -\frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dz}\cdot\frac{X}{Z}:$$

sicchè l'equazione (2) dà, dopo le riduzioni,

$$X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) + Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) = 0 \ldots (3)$$

Allorchè quest'ultima equazione, che esprime la condizione d'integrabilità, è soddisfatta, l'integrazione dell'equazione (1) si riduce a quella delle equazioni a due variabili. Infatti, se si avesse l'integrale dell'equazione (1), e si differenziasse considerandovi z come una costante, il risultato ottenuto dovrebbe coincidere con l'equazione (1) dopo che vi si è fatto dz nullo, vale a dire con l'equazione

$$Xdx + Ydy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Reciprocamente, se si dinota con μ il fattore che rende $Xdx + Ydy$ un differenziale esatto, allorchè si riguarda z come una costante, e se si pone

$$\int \mu\,(Xdx + Ydy) = F(x, y),$$

l'equazione (1) avrà per integrale

$$F(x, y) = Z_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Z_1 dinotando una funzione della sola variabile z. Per determinarla, osserviamo che si ha

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = \frac{dZ_1}{dz}dz,$$

e da un'altra parte

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = \mu(Xdx + Ydy) = -\mu Zdz,$$

onde

$$\frac{dZ_1}{dz} = \frac{dF}{dz} - \mu Z. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Bisogna dunque, se l'equazione (3) è soddisfatta, che le due variabili x, y spariscano ad un tempo dal secondo membro dell'equazione (6), allorchè si elimina una di esse per mezzo dell'equazione (5), o, in altri termini, bisogna che la derivata di questo secondo membro, presa rispetto ad x, sia nulla, allorchè vi si considera y come una funzione di x e di Z_1, data dall'equazione (5). Così, la condizione che si deve verificare, è espressa dall'equazione

$$\frac{d\cdot\left(\frac{dF}{dz} - \mu Z\right)}{dx} + \frac{d\cdot\left(\frac{dF}{dz} - \mu Z\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0,$$

o da

$$\frac{d^2F}{dx\,dz} - \mu\frac{dZ}{dx} - Z\frac{d\mu}{dx} - \left(\frac{d^2F}{dy\,dz} - \mu\frac{dZ}{dy} - Z\frac{d\mu}{dy}\right)\frac{X}{Y} = 0, \ldots (7)$$

rimettendo per $\frac{dy}{dx}$ il suo valore ricavato dall'equazione (4).

Si ha d'altronde

$$\frac{d^2F}{dx\,dz} = \frac{d\cdot\mu X}{dz} = \mu\frac{dX}{dz} + X\frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{d^2F}{dy\,dz} = \frac{d\cdot\mu Y}{dz} = \mu\frac{dY}{dz} + Y\frac{d\mu}{dz};$$

ed il fattore μ soddisfa (Art. 10) all'equazione di condizione

$$X\frac{d\mu}{dy} - Y\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) = 0.$$

Se ora si sostituiscono nell'equazione (7) i valori di

$$\frac{d^2F}{dx\,dz},\quad \frac{d^2F}{dy\,dz},\quad \frac{d\mu}{dx},$$

ricavati dalle tre ultime equazioni, le quantità

$$\mu,\ \frac{d\mu}{dy},\ \frac{d\mu}{dz}$$

vanno via nello stesso tempo, e si ricade sull'equazione (3) che esprime la condizione d'integrabilità.

28. Allorchè questa equazione non è soddisfatta, non esiste una funzione z di due variabili indipendenti x, y, suscettibile di verificare l'equazione (1); ciò che equivale a dire che questa equazione non esprime più una proprietà di cui possano godere le coordinate x, y, z di una certa superficie. Intanto l'equazione (1) non è priva per ciò di ogni significato e nulla impedisce che essa esprima, per esempio, una proprietà comune ad una serie di curve, di cui x, y, z dinoterebbero le coordinate correnti: solamente non vi è superficie che sia il luogo geometrico di tutte queste linee. Se si stabilisce un legame arbitrario tra y ed x, ciò che equivale a tracciare arbitrariamente la proiezione di una di queste linee sul piano xy, z diviene funzione della sola variabile indipendente x, e l'equazione (1), costruita come un'equazione differenziale ordinaria, determina la proiezione della stessa linea sul piano xz, purchè solamente si dia un punto pel quale questa proiezione deve passare. L'integrazione dell'equazione (1) consiste in questo caso a trovare tra le coordinate finite x, y, z un sistema di equazioni che racchiude una funzione arbitraria, e da cui si possano ricavare, con una determinazione convenevole della funzione arbitraria, tutte le linee di cui le coordinate godono della proprietà di soddisfare all'equazione differenziale proposta.

Ora, la soluzione di questo problema deriva immediatamente dall'analisi che ci ha condotto all'integrazione dell'equazione proposta, allorchè essa soddisfa alla condizione d'integrabilità; poichè se, nel caso contrario, in luogo di determinare la funzione Z_1 che entra nell'equazione (5), si pone

$$F(x, y) = \varphi(z), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

φ dinotando una funzione arbitraria, ed in seguito

$$\frac{dF}{dz} - \mu Z = \varphi'(z), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

i valori di x, y in funzione di z, che verificheranno le equazioni (8) e (9), verificheranno anche l'equazione proposta, di cui l'integrale sarà espresso in conseguenza dal sistema delle equazioni (8) e (9), contenente la funzione arbitraria φ e la sua derivata.

Supponiamo che si tratti di esprimere che la linea di cui le coordinate correnti sono x, y, z, è determinata dal contatto di una superficie conica col centro nel punto (x_0, y_0, z_0), e di una superficie di rotazione intorno all'asse delle z: le coordinate dei punti situati su questa linea dovranno verificare ad un tempo (*Agg. al Cal. Dif.* Art. 14, 16) le equazioni

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \ldots\ldots. (10)$$

$$py - qx = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (11)$$

$$dz = pdx + qdy,$$

da cui si ricava con l'eliminazione di p e di q,

$$\frac{dz}{z - z_0} = \frac{xdx + ydy}{x(x - x_0) + y(y - y_0)} \ldots\ldots.. (12)$$

Questa equazione non soddisfa alla condizione d'integrabilità, finchè x_0, y_0 non sono nulli: si ha in questo caso

$$\mu = x(x - x_0) + y(y - y_0),$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \ Z = -\frac{1}{z - z_0};$$

con ciò le equazioni (8) e (9) divengono

$$x^2 + y^2 = 2\varphi(z), \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0)}{z - z_0} = \varphi'(z) \ldots (13)$$

L'equazione (12), o il sistema delle equazioni (13) che ne è l'equivalente, appartiene dunque a tutte le linee che godono della proprietà geometrica definita qui sopra.

Si potrebbe modificare l'enunciato dello stesso problema, domandando l'equazione della superficie che si trova compresa ad un tempo nella famiglia delle superficie coniche caratterizzate dall'equazione (10) ed in quella delle superficie di rotazione caratterizzate dall'equazione (11). L'equazione (12) alla quale si giunge per esprimere questa doppia condizione, non soddisfacendo alla condizione d'integrabilità finchè x_0, y_0 non sono nulli, ne risulta che, nel caso generale, una tale superficie non esiste. Allorchè x_0, y_0 sono nulli, l'equazione (12) s'integra e dà

$$z - z_0 = c \sqrt{(x^2 + y^2)},$$

c dinotando la costante arbitraria. Questa equazione appartiene a tutt'i coni retti che hanno il loro centro nel punto dell'asse dello z di cui l'ordinata è z_0; ed è chiaro che in effetto questi coni retti soddisfano al problema così enunciato.

Mettendo l'equazione (12) sotto la forma

$$dz\,[x(x - x_0) + y(y - y_0)] = (z - z_0)(xdx + ydy),$$

si vede che essa è soddisfatta dall'equazione $z - z_0 = 0$, senza che si abbia bisogno di supporre nulle le coordinate x_0, y_0. Così il piano condotto pel punto (x_0, y_0, z_0), perpendicolarmente all'asse delle z, è una superficie che soddisfa all'enunciato del problema; ma questa soluzione non è che singolare, come lo mostra bene la forma dell'equazione quì sopra, e non vi si trova la costante arbitraria essenziale all'integrale completo.

Integrazione delle equazioni alle differenze parziali, lineari e di primo ordine.

29. L'integrazione delle equazioni alle differenze parziali di primo ordine, lineari rispetto alle derivate parziali che esse racchiudono, è stata ridotta da Lagrange a dipendere dall'integrazione di un sistema di equazioni differenziali simultanee. Siano

$$X\frac{du}{dx} + Y\frac{du}{dy} + Z\frac{du}{dz} + T\frac{du}{dt} + \text{etc.} = U \ldots\ldots (1)$$

l'equazione che si deve integrare, ed

$$F(u, x, y, z, t, \text{etc.}) = 0$$

l'integrale cercato: u dinotando una funzione delle n variabili indipendenti x, y, z, t, etc., ed U, X, Y, Z, T, etc. delle funzioni qualunque delle $n+1$ variabili u, x, y, z, t, etc. Si ha

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}=0,\ \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dy}=0,\ \frac{dF}{dz}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dz}=0,\ \text{etc.}:$$

in conseguenza, l'equazione (1) può prendere la forma

$$U\frac{dF}{du}+X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}+T\frac{dF}{dt}+\text{etc.}=0;\ \ldots (2)$$

ed il problema è ridotto a determinare nel modo più generale, la funzione F che soddisfa all'equazione (2).

Supponiamo che si sia integrato, con tutta la generalità richiesta, il sistema delle n equazioni differenziali simultanee, racchiuse nell'equazione continua

$$\frac{du}{U}=\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\frac{dt}{T}=\text{etc.}:\ \ldots\ldots\ldots (3)$$

si potranno mettere gl'integrali sotto la forma

$$f_1(x, y, z, t, \ldots u)=a_1, f_2(x, y, z, t, \ldots u)=a_2, \ldots$$
$$\ldots f_n(x, y, z, t, \ldots u)=a_n, \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$a_1, a_2, \ldots a_n$ dinotando le n costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione; e si avrà per conseguenza

$$\frac{df_1}{du}du+\frac{df_1}{dx}dx+\frac{df_1}{dy}dy+\frac{df_1}{dz}dz+\frac{df_1}{dt}dt+\text{etc.}=0,$$

$$\frac{df_2}{du}du+\frac{df_2}{dx}dx+\frac{df_2}{dy}dy+\frac{df_2}{dz}dz+\frac{df_2}{dt}dt+\text{etc.}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{df_n}{du}du+\frac{df_n}{dx}dx+\frac{df_n}{dy}dy+\frac{df_n}{dz}dz+\frac{df_n}{dt}dt+\text{etc.}=0;$$

o pure, in virtù delle equazioni (3),

$$\left.\begin{array}{l} U\frac{df_1}{du}+X\frac{df_1}{dx}+Y\frac{df_1}{dy}+Z\frac{df_1}{dz}+T\frac{df_1}{dt}+\text{etc.}=0,\\ U\frac{df_2}{du}+X\frac{df_2}{dx}+Y\frac{df_2}{dy}+Z\frac{df_2}{dz}+T\frac{df_2}{dt}+\text{etc.}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ U\frac{df_n}{du}+X\frac{df_n}{dx}+Y\frac{df_n}{dy}+Z\frac{df_n}{dz}+T\frac{df_n}{dt}+\text{etc.}=0. \end{array}\right\}(5)$$

Così le n funzioni $f_1, f_2, \dots f_n$ soddisfano all'equazione (2) e forniscono altrettanti integrali particolari della proposta (1).

È facile vedere che una funzione arbitraria Φ delle quantità $f_1, f_2, \dots f_n$ soddisfa del pari all'equazione (1); poichè se si addizionano i primi membri delle equazioni (5), dopo di averli moltiplicati rispettivamente per

$$\frac{d\Phi}{df_1}, \frac{d\Phi}{df_2}, \dots \frac{d\Phi}{df_n},$$

viene

$$U\frac{d\Phi}{du}+X\frac{d\Phi}{dx}+Y\frac{d\Phi}{dy}+Z\frac{d\Phi}{dz}+T\frac{d\Phi}{dt}+\text{etc.}=0.$$

Dunque si ha per integrale della proposta

$$\Phi(f_1, f_2, f_3, \dots f_n)=0, \quad \text{o } f_1=\varphi(f_2, f_3, \dots f_n),$$

Φ, φ essendo caratteristiche di funzioni arbitrarie; e d'altronde si riconosce che questo integrale ha tutta la generalità richiesta, poichè non si può eliminare che un segno di funzione arbitraria, con la combinazione di un'equazione con le sue derivate parziali di primo ordine.

30. Applichiamo quest'analisi all'equazione a tre variabili

$$X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z, \quad \text{o } Xp+Yq=Z, \dots\dots\dots (6)$$

e supponiamo in primo luogo che le funzioni X, Y, Z si riducano a numeri costanti P, Q, R: le equazioni (3) diventano

$$Rdx-Pdz=0, \quad Rdy-Qdz=0,$$

ed esse conducono agl'integrali

$$Rx - Pz = a_1, \quad Ry - Qz = a_2; \ldots\ldots\ldots (7)$$

sicchè la proposta (6) ha per integrale generale

$$Rx - Pz = \varphi(Ry - Qz).$$

Questa equazione caratterizza la famiglia delle superficie cilindriche, e le equazioni (7) sono quelle delle rette generatrici.

Conserviamo ad X, Y i loro valori costanti P, Q, e poniamo $Z = z$: si avranno ad integrare le equazioni differenziali

$$Pdy - Qdx = 0, \quad zdx - Pdz = 0,$$

onde $$Py - Qx = a_1, \quad z = a_2 e^{\frac{x}{P}};$$

ciò che mette l'integrale della proposta sotto la forma

$$z = e^{\frac{x}{P}} \cdot \varphi(Py - Qx) \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Infine, se prendiamo per ultimo esempio l'equazione

$$px + qy = n\sqrt{(x^2 + y^2)}, \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

avremo da integrare le equazioni differenziali a due variabili

$$xdz = ndx\sqrt{(x^2 + y^2)}, \quad xdy - ydx = 0:$$

la seconda dà $y = a_1 x$, e la prima diviene, con la sostituzione di questo valore di y,

$$dz = ndx\sqrt{(1 + a_1^2)}, \text{ onde } z = n\sqrt{(1 + a_1^2)}\,x + a_2,$$

e rimettendo per a_1 il suo valore,

$$z - n\sqrt{(x^2 + y^2)} = a_2.$$

In conseguenza l'integrale è

$$z = n\sqrt{(x^2 + y^2)} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

31. Il proprio degl'integrali completi (4) si è di soddisfare alla equazione (3) immediatamente, in questo senso che i

valori di du, dx, dy, dz, etc., ricavati dalle derivate delle equazioni (4), rendono le equazioni (3) identiche, senza che vi sia bisogno di ritornare ai legami stabiliti tra le variabili u, x, y, z, etc, dalle stesse equazioni (4); poichè questi legami dipendono dalle costanti a_1, a_2, etc., e le equazioni (4), o le loro derivate, debbono verificare le equazioni (3), qualunque siano i valori assegnati a quelle costanti arbitrarie. Inversamente, e per una ragione contraria, se le equazioni (3) ammettono degl'integrali singolari

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x, y, z, t, \ldots u) = 0,\\ \varphi_2(x, y, z, t, \ldots u) = 0, \ldots\ldots \varphi_n(x, y, z, t, \ldots, u) = 0,\end{array}\right\} \ldots (10)$$

le derivate delle equazioni (10) non verificheranno le equazioni (3) se non tenendo conto dei legami espressi dalle equazioni (10); o, in altri termini, bisognerà combinare le equazioni (10) con le loro derivate, per soddisfare al sistema delle equazioni (3). Ciò posto, ciascuna delle equazioni (10) soddisferà all'equazione (2), o all'equazione (1) di cui quella è una trasformata; ma non si soddisferà all'equazione (2) prendendo per F una funzione arbitraria delle quantità $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, o una funzione arbitraria nella quale entrerebbero, in totalità o in parte, le quantità $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, associate alle quantità $f_1, f_n, \ldots f_n$, prese anche in totalità o in parte. Dunque l'equazione (1) non ammette altro integrale completo che quello in cui le quantità $f_1, f_2, \ldots f_n$ entrano esclusivamente sotto il segno di funzione arbitraria, ma essa è soddisfatta da ciascuna delle equazioni (10); e queste equazioni sono degl'integrali singolari dell'equazione (1), poichè essi non si trovano racchiusi nell'integrale completo.

Prendiamo per esempio l'equazione lineare di primo ordine a tre variabili

$$p - q\left[\frac{1}{2} + x - \sqrt{(x^2 + y + z)}\right] = \frac{1}{2} - x + \sqrt{(x^2 + y + z)}, \ldots (11)$$

di cui l'integrazione è subordinata a quella delle equazioni differenziali simultanee

$$y' = -\frac{1}{2} - x + \sqrt{(x^2 + y + z)},$$

$$z' = \frac{1}{2} - x + \sqrt{(x^2 + y + z)},$$

che si possono rimpiazzare con

$$z' = 1 + y', \quad z + y = x(z' + y') + \left(\frac{z' + y'}{2}\right)^2,$$

e che hanno per integrali completi,

$$z = x + y + a_1, \quad z + y = 2a_2 x + a_2^2.$$

Il secondo di questi integrali dà origine all'integrale singolare

$$x^2 + y + z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Ciascuna delle equazioni

$$z - x - y = a_1, \quad -x + \sqrt{(x^2 + y + z)} = a_2$$

da per p e q dei valori che, messi nell'equazione (11), la rendono identica: in conseguenza, l'equazione (11) ha per integrale completo

$$-x + \sqrt{(x^2 + y + z)} = \psi(z - x - y),$$

ψ essendo una caratteristica di funzione arbitraria. Al contrario, l'equazione (12) dà per p e q dei valori che, sostituiti nell'equazione (11), non soddisfano a questa equazione se non tenendo conto dell'equazione (12) per togliere il radicale che entra nell'equazione (11). Da ciò l'equazione (12) non soddisfa alla proposta (11) che in qualità di integrale singolare.

Se si mette l'equazione (9) sotto la forma equivalente

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + n\sqrt{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{dF}{dz} = 0,$$

si troverà del pari che essa ammette per integrale singolare l'equazione

$$x^2 + y^2 = 0,$$

o il sistema delle equazioni $x = 0$, $y = 0$.

FINE DEL CALCOLO INTEGRALE.



